Ueber die

allgemeine und volle Gültigkeit

der

mathematiſchen Formeln.

Ein Beitrag

zur

Deutung des Negativen und Imaginären.

Von

J. F. W. Gronau,

Oberlehrer an der Realſchule zu St. Johann in Danzig.

Zweiter Theil.

I. Heft.

Danzig.

In Commiſſion bei Conſt. Ziemſſen.

1863.

Wedel'ſche Hofbuchdruckerei.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorrede.

Der erste, arithmetische Theil dieser Schrift ist schon 1857 erschienen, die Zwischenzeit habe ich benutzt, um aus meiner in früheren Abhandlungen dargestellten Ansicht über das Negative und Imaginäre einige practische Consequenzen zu ziehen. So entstand die in den Schriften der Danziger Naturforschenden Gesellschaft befindliche Abhandlung: Auflösung der kubischen Gleichungen durch trigonometrische Functionen des Kreises und der Hyperbel, 1861, nebst Tafeln der hyperbolischen Sektoren und der Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus, 1862; so ist auch eine zweite Arbeit entstanden, welche auf die Integralrechnung und dadurch auf viele Probleme der Mechanik nicht ohne Einfluß bleiben dürfte, und welche gleichfalls in den Schriften der genannten Gesellschaft einen Platz einnehmen wird und schon unter der Presse ist.

Bevor ich zu meinem gegenwärtigen Vorwurf übergehe, will ich noch an drei Stellen meiner früheren Abhandlungen eine Verbefferung anbringen.

1) In der 1845 bei Kabus erschienenen Schrift: Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der arithmetischen, geometrischen und harmonischen Progressionen habe ich pag. 18 beiläufig gesagt: „Um eine solche Curve zu erhalten, deren Ordinaten die Stellvertreter der verschiedenen Summen bei den arithmetischen Reihen sind, construire man fünf oder der Symmetrie wegen sechs gerade Kegel, vier, bei denen der Winkel an der Spitze u und einen oder zwei, bei denen der Winkel an der Spitze $180^0 - u$ ist. Alsdann nehme man drei auf einander senkrecht stehende Stäbe, Xx, Yy, Zz, welche die Achsen der sechs Kegel werden sollen. Ueber jedes der sechs Enden der Stäbe ziehe man einen Kegel, so daß die Spitzen aller Kegel in einem Punkte sich vereinigen, und die beiden Kegel mit dem Winkel $180^0 - u$ an dem Stäbchen Yy befestigt sind. Legt man nun eine Ebene, parallel mit der Grundfläche eines der beiden letztgenannten Kegel, so wird diese Ebene auch die vier herumliegenden Kegel mit dem Winkel u schneiden und der vollständige Schnitt ist ein Kreis mit vier gleichseitigen Hyperbeln, deren Scheitel in der Peripherie des Kreises gleich weit von einander entfernt liegen und deren Parameter dem Durchmesser dieses Kreises gleich sind." Aber die Behauptung, daß diese Hyperbeln gleichseitig sind, ist nur dann richtig, wenn der Winkel $u = 90^0$ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Digitized by Google

2) In der oben erwähnten Schrift über die Auflöſung der kubiſchen Gleichungen habe ich im Anhange pag. 47—49 einen zwar ſtrengen, aber etwas weitläuftigen Beweis ohne Inte-

Fig. 10. gralrechnung dafür gegeben, daß der aſymptotiſche Raum $ACUO = c^2 \cdot \mathrm{Log}\left(\frac{U}{c}\right)$ iſt. Ich hoffe, daß folgender Beweis wegen ſeiner Einfachheit mehr zuſagen werde:

Die Zahlen 1, d, e, f, ... p, q, r, s, t, u mögen um gleich viel, nämlich um unendlich wenig, um δ von einander verſchieden ſein, ſo daß $d = 1 + \delta$, $e = d + \delta$, ... oder $t = u - \delta$, $s = t - \delta$.... iſt.

$$\text{Da } \mathrm{Log}\, t = \mathrm{Log}\,(u - \delta) = \mathrm{Log}\, u + \mathrm{Log}\left(1 - \frac{\delta}{u}\right)$$
$$= \mathrm{Log}\, u - \left[\frac{\delta}{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^4 + \ldots\right],$$

ſo iſt mit Vernachläßigung der höhern Potenzen von δ nicht bloß:

$$\frac{\delta}{u} = \mathrm{Log}\, u - \mathrm{Log}\, t, \text{ ſondern auch}$$
$$\frac{\delta}{t} = \mathrm{Log}\, t - \mathrm{Log}\, s,$$
$$\frac{\delta}{s} = \mathrm{Log}\, s - \mathrm{Log}\, r$$
$$\vdots$$
$$\frac{\delta}{e} = \mathrm{Log}\, e - \mathrm{Log}\, d$$
$$\frac{\delta}{d} = \mathrm{Log}\, d - \mathrm{Log}\, 1.$$

Alſo iſt $\frac{\delta}{u} + \frac{\delta}{t} + \frac{\delta}{s} + \frac{\delta}{r} + \ldots \frac{\delta}{f} + \frac{\delta}{e} + \frac{\delta}{d} = \mathrm{Log}\, u.$

Nun ſei die Aſymptote von C bis U in unendlich viele gleiche Theile zerlegt, jeder $= \Delta$, nämlich $CD = DE = EF = FG = \ldots PQ = QR \ldots = TU = \Delta$. Ferner mögen die Abſciſſenlinien MC, MD, ME, ... MS, MT, MU ſucceſſive mit c, D, E, F .... R, S, T, U und die Zahlen, welche ihre Länge, nach c gemeſſen, angeben, mit 1, d, e, f, g .... q, r, s, t, u bezeichnet werden. Auch ſei $\frac{\Delta}{c} = \delta$. Die entſprechenden Ordinaten und die Zahlen, welche ihre Länge angeben, mögen mit denſelben, aber mit geſtrichenen Buchſtaben veranſchaulicht werden. Dann iſt bekanntlich:

$U \cdot U' = c^2$, $T \cdot T' = c^2$, ... $D \cdot D' = c^2$, oder $u \cdot u' = 1$, $t \cdot t' = 1$, $s \cdot s' = 1$, ...

Endlich mögen noch die aufeinander folgenden aſymptotiſchen, unendlich kleinen, als Recht-

Digitized by Google

ecke zu betrachtenden Räume zwiſchen zwei benachbarten, an einander liegenden Ordinaten mit (CD), (DE), (EF) ... (RS), (ST), (TU) ausgedrückt werden. Dann iſt

$$(TU) = \Delta . U' = c^2 . \delta . u' = c^2 . \frac{\delta}{u}$$

$$(ST) = \Delta . T' = c^2 . \delta . t' = c^2 . \frac{\delta}{t}$$

$$\vdots$$

$$(DE) = \Delta . E' = c^2 . \delta . e' = c^2 . \frac{\delta}{e}$$

$$(CD) = \Delta . D' = c^2 . \delta . d' = c^2 . \frac{\delta}{d}$$

Alſo iſt der ganze aſymptotiſche Raum ACUO = A

$$= c^2 . \left(\frac{\delta}{u} + \frac{\delta}{t} + \frac{\delta}{s} + \ldots \frac{\delta}{f} + \frac{\delta}{e} + \frac{\delta}{d}\right) = c^2 . \text{Log } u.$$

Kurz, es iſt $A = c^2 . \text{Log} \left(\frac{U}{c}\right)$.

Man ſucht bisweilen Beweiſen dieſer Art dadurch eine noch größere Schärfe zukommen zu laſſen, daß man die unendlich kleinen Räume (CD), (DE) ... nicht als Rechtecke, ſondern als Trapeze anſieht. Obgleich ich dieſes nicht für nothwendig halte, ſo will ich noch weiter gehen und annehmen, daß erſt die unendlich kleinen Theile von (CD), (DE) ... Rechtecke ſind.

Zu dieſem Zwecke zerlege man etwa die unendlich kleine Strecke TU = Δ nochmals in unendlich viele (n) gleiche Theile, ſo daß die auf dieſe Strecke TU ſich beziehenden Abſciſſen, ich meine die Zahlen, welche ihre Längen angeben, alſo die Abſciſſenzahlen, ſind:

$$\frac{MU}{c} = u, \quad u - \frac{\delta}{n}, \quad u - \frac{2\delta}{n}, \quad u - \frac{3\delta}{n}, \ldots\ldots u - \delta = \frac{MT}{c}$$

und die entſprechenden Ordinatenzahlen:

$$\frac{1}{u'}, \quad \frac{1}{u - \frac{\delta}{n}}', \quad \frac{1}{u - \frac{2\delta}{n}}', \quad \frac{1}{u - \frac{3\delta}{n}}', \ldots\ldots \frac{1}{u - \delta}'$$

oder

$$\frac{1}{u'}, \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{\delta}{nu}\right)}', \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{2\delta}{nu}\right)}', \quad \frac{1}{u . \left(1 - \frac{3\delta}{nu}\right)} \cdots \frac{1}{u . \left(1 - \frac{\delta}{u}\right)}.$$

Dann iſt, wenn $\frac{\delta}{nu} = \nu$ geſetzt wird, wo alſo ν eine unendlich kleine Größe der zweiten Ordnung bedeutet:

$$(TU) = c^2 . \frac{\delta}{u} . \frac{1}{u} \left[\frac{1}{1 - \nu} + \frac{1}{1 - 2\nu} + \frac{1}{1 - 3\nu} + \cdots \frac{1}{1 - n\nu}\right]$$

Digitized by Google

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{1}{n} \Big[1 + \nu + \nu^2 + \nu^3 + \ldots\ldots$$
$$1 + 2\nu + 4\nu^2 + 8\nu^3 + \ldots\ldots$$
$$1 + 3\nu + 9\nu^2 + 27\nu^3 + \ldots\ldots$$
$$\vdots$$
$$1 + n\nu + n^2\nu^2 + n^3\nu^2 + \ldots \Big]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \frac{1}{n} \left[n + \frac{n^2}{2}\nu + \frac{n^3}{3}\nu^2 + \frac{n^4}{4}\nu^3 + \ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \cdot \left[1 + \frac{n\nu}{2} + \frac{n^2\nu^2}{3} + \frac{n^3\nu^3}{4} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \frac{\delta}{u} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot \left[\frac{\delta}{u} + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{u}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\delta}{u}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{u}\right)^4 + \ldots\ldots \right]$$

$$= c^2 \cdot (\text{Log } n - \text{Log } t).$$

Weil nun ebenso $(ST) = c^2 \cdot (\text{Log } t - \text{Log } s)$
$(RS) = c^2 \cdot (\text{Log } s - \text{Log } r)$
$\vdots$
$(DE) = c^2 \cdot (\text{Log } e - \text{Log } d)$
$(CD) = c^2 \cdot (\text{Log } d - \text{Log } 1)$,

so ist $A = c^2 \cdot \text{Log } u = c^2 \cdot \text{Log } \left(\frac{U}{c}\right)$.

Dieser zweite Beweis scheint ganz strenge zu sein, und dennoch ist dem nicht so. Denn es ist

$$1 + 2 + 3 + \ldots n = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ und nicht } = \frac{n^2}{2},$$

$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \text{ und nicht } = \frac{n^3}{3}.$$

$\vdots$

Während aber der erste Beweis nur bis auf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung exclusive zu verbürgen ist, ist die Richtigkeit des zweiten Beweises zu verbürgen bis auf unendlich kleine Größen der zweiten Ordnung inclusive.

3) In derselben Schrift über die kubischen Gleichungen pag. 7 habe ich einen etwas schwerfälligen Beweis dafür gegeben, daß auch $A = \frac{r^2}{2} \cdot \text{Log } \frac{x+y}{r}$ ist, wo $r = MA$, $x = MW$, $y = WO$.

Hier ist ein besserer Beweis: Man verlängere UO bis B, so sieht man sogleich, daß $\frac{U}{c} = \frac{MB}{MA} = \frac{x + BW}{r}$ ist. Und weil $M = 45^0$ ist, so ist auch $B = 45^0 = O$. Mithin ist $BW = OW = y$ und $\frac{U}{c} = \frac{x+y}{r}$. Da endlich $MC = c = AC$, so ist $c^2 = \frac{r^2}{2}$ und $A = \frac{r^2}{2} . Log . \frac{x+y}{r}$.

Auch scheint es mir nicht ungehörig zu sein, — die mir in Bezug auf meine frühern Schriften gewordenen Anerkennungen verschweigend — von dem, was gegen den ersten (arithmetischen) Theil meiner Arbeit mir zu Gesicht gekommen ist, das Schärfste mitzutheilen. Der geneigte Leser wird dann um so leichter ein unparteiisches Urtheil über den von mir behandelten Stoff fällen können. In einem an mich gerichteten Schreiben vom 20. Mai 1860 heißt es: .... „Die große Künstlichkeit der Erklärung an einigen Stellen stört mich. So z. B. § 30 bei den Ehrlichen und Zweideutigen. Ich glaube kaum, daß man überall so ins Detail gehen kann, wie Sie es thun; gerade bei eingekleideten Aufgaben, wo von x Männern, y Weibern, z Kindern ꝛc. die Rede ist, scheint mir dies aus folgenden Gründen bedenklich. Zur Lösung einer eingekleideten Aufgabe gehören zwei Operationen: die Bildung der Gleichung und die Auflösung derselben. Nur die letztere Operation ist Sache der Algebra, und die Algebra fragt nicht und hat auch nicht zu fragen, ob in der Gleichung $x^3 + 6x^2 = 3920$ (§ 30) das vorkommende x Personen oder sonst was bedeutet; für die Algebra ist x eine abstrakte Zahl und nichts weiter; will sich Jemand unter x irgend etwas Concretes vorstellen, so mag er das auf seine Rechnung und Gefahr thun, aber er mache dann auch die Algebra nicht für etwaige Discrepanzen verantwortlich. — Ich schließe hieraus, daß solche concrete Deutungen des Negativen und Imaginären mit einem bedeutenden Grade der Willkührlichkeit behaftet sind und daß überhaupt nur im Gebiete des Abstrakten eine streng wissenschaftliche Deutung negativer und imaginärer Zahlen (nicht Größen, denn diese sind weder positiv, noch negativ, noch imaginär) gegeben werden kann ....; Die erwähnte Willkühr tritt auch bei Ihren Deutungen sehr klar hervor. In § 28 sagen Sie selbst, man müsse eine andere Einkleidung wählen, um die Sache annehmbar zu machen; nun ist aber jede Einkleidung, wie überhaupt jedes Kleid, etwas willkührliches, und dann haben Sie doch eigentlich nichts weiter gewonnen, als daß Sie zwei verschiedene Aufgaben (denn Kaufen und in Futter geben sind zwei verschiedene Handlungen) neben einander stellen, welche beide zu derselben quadratischen Gleichung führen und wobei Sie die eine Wurzel für die eine Aufgabe, die andere für die andere benutzen."

Nur wenige Worte will ich dem geehrten Verfasser des Briefes erwidern. Es versteht sich von selbst, daß nie die ganze Aufgabe mit ihrer Einkleidung von Personen, Vieh, Geld und dergleichen in die Gleichung gebracht werden kann und soll, sondern nur ihr wesentlicher Inhalt, d. h. außer den aus ihr abstrahirten Zahlen nur noch gewisse gleichfalls abstrakte Begriffe, Eigenschaften oder Beziehungen der in der Aufgabe vorkommenden Handlungen oder Gegenstände, welche Zahlen und Begriffe zunächst in dem Sinne zu verstehen sind, wie alle Welt sie versteht, im positiven Sinne. Giebt dann die Auflösung für x etwas Negatives oder Imaginäres, so

hat man zuzusehen, ob nicht jene Zahlen und die damit in Verbindung stehenden Begriffe auch als Repräsentanten der Aufgabe einen vollen oder halben Gegensatz zulassen. So sind Vieh kaufen und Vieh auf die Weide geben nicht nur verschiedene Handlungen, sondern für die Aufgabe in § 28 ganz entgegengesetze Begriffe, die daher füglich mit + und — zu bezeichnen sind. So wird ferner in § 30 nach der Anzahl von Personen gefragt, die in einem bestimmten, ehrlichen Sinne handeln; findet man nun außer dem vorzugsweise in Betracht kommenden positiven Werthe noch für x eine complexe Zahl, so habe ich mich nicht gescheut, das darin vorkommende Negative mit unehrlich und das Imaginäre mit zweideutig zu bezeichnen und demgemäß die Deutung unternommen. Daß dann bei praktischen Aufgaben mitunter eine künstliche Auslegung zum Vorschein kommt, ist nicht zu vermeiden. Eben deshalb habe ich an einigen Stellen, um die andern, nicht positiven Auflösungen annehmbarer zu machen — denn so habe ich sagen wollen, nicht annehmbar zu machen,*) — die Aufgabe selbst anders ausgedrückt. Meine Meinung ist aber stets gewesen und ist es auch noch, daß mit wenigen Ausnahmen, über die ich mich zum Theil erklärt habe (§ 7, pag. 6), oder noch erklären werde, sämmtliche Auflösungen, die eine Gleichung ergiebt, zu der einen Aufgabe, welche zu der Gleichung Veranlassung gegeben hat, gehören.

Oder mit andern Worten: Allerdings hat die Algebra es zunächst mit der Auflösung der Gleichung zu thun. Ist diese aber vollzogen, so wird man wohl nicht umhin können, zu prüfen, ob die gewonnenen Resultate zu der Aufgabe, welche zur Aufstellung der Gleichung Veranlassung gab, passen oder nicht. Hat man nun für x etwas Negatives oder Imaginäres gefunden, so wird man zu bedenken haben, daß dieses x, mag es eine Anzahl von lebendigen Wesen oder von leblosen Sachen vorstellen, nicht absolut, nicht als eine wirkungslose Masse aufzufassen ist, sondern daß die sogenannten unbekannten Größen als nach einer gewissen Richtung hin handelnd oder leidend, oder als in gewissen Beziehungen zu andern gleichfalls in der Aufgabe vorkommenden Begriffen stehend auftreten; man wird zu untersuchen haben, ob die vorkommende Handlungsweise oder Beziehung nicht eines mehrfachen, namentlich des vollen und halben Gegensatzes fähig ist. Und wenn dies der Fall ist, so wird die Deutung der sonst meistens verworfenen negativen und imaginären Auflösungen stets gelingen.

Kurz, auch ich beziehe das Negative und Imaginäre nicht auf die concreten Dinge selbst, sondern auf die abstrakten Gegensätze, welche sich und sofern sie sich im Concreten vorfinden.

Wenn ich nichtsdestoweniger an einigen Stellen der Abhandlung von negativen und imaginären Größen gesprochen habe, so ist das als eine abgekürzte Redeweise zu betrachten, die ich, wo sie vorkommt, stets sorgfältig erläutert habe.

Danzig, den 10. März 1863.

Der Verfasser.

*) Ein anderer Druckfehler von geringerer Bedeutung befindet sich § 11 pag. 10, Zeile 12. Statt $s = \frac{d}{2} \cdot \frac{\alpha}{2}$ muß es heißen $s = \frac{d}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

Digitized by Google

II. Geometrischer Theil.

A. Aufgaben, bei denen meistens eine quadratische Gleichung zum Grunde liegt.

§ 33.

28ste Aufgabe. Sectio aurea. Von der Linie AB = a soll von B aus ein Stück BC = x weggenommen werden, welches die mittlere Proportionale zwischen dem Reste AC und der ganzen Linie AB sei. Fig. 1.

Auflösung. Es ist $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, aber $x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ wird unter Andern von Prof. Koppe (Planimetrie § 263) verworfen. Ich aber verwerfe nichts, sondern sage:

Construction. Man mache AB = a und $AF = \frac{a}{2}$ senkrecht auf AB. Fragt man nun, wie weit F von B entfernt ist, so ist darauf nicht nur die gewöhnliche Antwort zu geben: $FEB = +\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, sondern auch folgende bisher meistens übersehene Antwort: FG...HB; d. h. um von F bis B zu gelangen, kann ich auch auf der unbegrenzten und folglich unendlichen, in sich geschlossenen geraden Linie, die schon Mancher vor mir als einen Kreis mit unendlichem Radius sich gedacht hat, den Weg von F über G einschlagen und in dieser Richtung immer fort gehen, bis ich über H nach B komme. Bezeichnet man den Weg von F über G H B bis F, welchen ich eine volle Unendlichkeit nenne, mit dem bekannten Zeichen ∞, so kann mithin die Entfernung von F bis B auch ausgedrückt werden durch $\infty - FEB = \infty - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, wofür ohne Weiteres $-\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ zu setzen ist. Denn da diesmal der Gang von F über G nach B geschehen sollte, und daher diese Richtung die positive genannt werden muß, so ist die stellvertretende Richtung von F über E negativ zu nennen.

Mit anderen Worten: Nachdem die Linien AB und AF gezogen sind, soll man noch eine gerade Linie von F nach B ziehen. Wer sieht aber nicht ein, daß dies auf zwei Arten ausge-

Digitized by Google

führt werden kann? Einmal kann ich die Linie von F über E nach B legen, wobei ich sagen werde, daß $FB = + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ ist; dann aber kann ich die zu ziehende Linie mit demselben theoretischen Rechte auch von F über G hinaus bis nach H und B führen. Doch dafür lasse ich sie in Praxi lieber den Weg FEB gehen, den ich aber jetzt als Stellvertreter eines anderen längeren Weges wegen seiner entgegengesetzten Richtung als negativ anzusehen habe. Kurz es kann auch $FB = - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ gesetzt werden.

In beiden Fällen, mag nun $FB = \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ sein, habe ich davon noch $\frac{a}{2}$ abzuziehen, um x zu erhalten. Mache ich nun $FE = FG = FA = \frac{a}{2}$, so ist

im ersten Falle $x = + FB - FE = + BE = - \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

im andern Falle $x = - FB - FG = - BG = - \frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

Ich will hiemit sagen, daß das gesuchte x einmal eine positive Linie BE ist, dann aber auch eine negative Linie sein kann, welche durch BG repräsentirt wird.

Nun habe ich noch von AB, und zwar von B aus, das eben gefundene Stück x wegzunehmen. Mache ich $BC = BE$, so ist AC der Rest für den ersten Fall und es ist wirklich $AC : CB = CB : AB$. Was den zweiten Fall anbelangt, so muß dadurch, daß ich von AB eine negative Linie BG wegnehme, der Rest um dieselbe positive Quantität größer werden. Ich mache deshalb $BD = BG$ und erkläre AD für den Rest.

Beweis. Ich habe wohl nur zu zeigen, daß die wegzunehmende negative Linie BG, oder die ihr gleiche und dann auch als negativ aufzufassende Linie BD die mittlere Proportionale ist zwischen der Linie AB und dem Reste AD. Zu dem Ende beschreibe man um F einen Kreis mit dem Radius FA. Alsdann ist

$$BE : AB = AB : BG,$$

folglich auch $AB : BE + AB = BG : AB + BG$,

d. h. $AB : BG = BG : AD$,

oder $AB : + BD = + BD : AD$,

und natürlich auch $: AB : - BD = - BD : AD$,

weil sowohl $+ BD \times + BD = + BD^2$,

als auch $- BD \times - BD = + BD^2$ ist,

wobei meine Erklärung des Multiplicirens in § 30 zu vergleichen ist.

Anmerkung. Daß durch das negative x, dessen absoluter Werth um a größer als der positive ist, eigentlich folgende Aufgabe gelöst wird: Eine Linie AB um ein solches Stück BD zu verlängern, daß die Verlängerung die mittlere Proportionale werde zwischen der gegebe-

Digitized by Google

nen Linie AB und dieſer Linie AB nebſt der Verlängerung, hat ſchon Klügel in ſeinem Wörterbuch 1803 I. pag. 110 bemerkt.

§ 34.

29ſte Aufgabe. Ein gleichſchenkliges rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, deſſen Umfang $= p$ gegeben iſt.

Auflöſung. Es iſt eine Cathete $x = p \mp p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$,

und die Hypotenuſe $y = -p \pm p \cdot \sqrt{2}$.

Koppe (§ 274) läßt wieder die untern Zeichen nicht gelten, weil „die Werthe von x und y offenbar $> o$ und $< p$ ſein müſſen." Ihn hat bereits 1855 Profeſſor Dr. Funck in dem Culmer Programm zu widerlegen verſucht, indem er pag. 14 ſagt: „Es liegt uns die Verpflichtung ob, eine geometriſche Deutung der unteren Zeichen aufzuſuchen, und gerade dann vollends, wenn ſie, wie hier allerdings der Fall iſt, in gar keiner unmittelbaren Beziehung zu der geſtellten Aufgabe ſteht.... Der andere Werth von y, nämlich $y = -(p + p\sqrt{2})$, deſſen Geltung Herr Prof. Koppe in Bezug auf unſere vorliegende ſpecielle Aufgabe allerdings mit Recht verwirft, iſt aber nichts weniger als bedeutungslos im geometriſchen Sinne. Beide Werthe von y ſeien ja aus der Gleichung $y^2 = p(p - 2y)$ hervorgegangen, welche nur die Aufgabe ſtelle: In der Richtung von bc $= p$ einen ſolchen Abſchnitt bg oder bg¹*) zu beſtimmen, daß das Quadrat deſſelben gleich iſt dem Rechteck aus der gegebenen Linie in die Differenz zwiſchen der gegebenen Linie und dem Doppelten dieſes Abſchnitts. Dieſe Aufgabe aber laſſe eine doppelte Antwort zu, doch trage die ihr zum Grunde liegende Gleichung nicht das kleinſte Merkmal davon in ſich, daß hinterher ein gleichſchenklig rechtwinkliges Dreieck conſtruirt werden ſolle, deſſen Hypotenuſe jener quäſtionirte Abſchnitt iſt."

Mit einer ſolchen Widerlegung des Koppe wird dem Leſer wohl ſchwerlich gedient ſein. Die meinige enthält folgende

Conſtruction in Beziehung auf die untern Zeichen. Man mache einen rechten Winkel, deſſen Schenkel AC und BC gleich $x = p + p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ſind. Aber die Verbindung der Punkte A und B vollziehe man nicht dadurch, daß man ohne Weiteres die kurze Linie AB zieht, welche $= p + p \cdot \sqrt{2}$ ſein würde, ſondern man bewerkſtellige dieſe Verbindung dadurch, daß man von A über D hinaus eine gerade Linie zieht, welche erſt, nachdem ſie vorher in E angelangt iſt, bei weiterer Fortbewegung in B ankommt. Auf dieſe Weiſe erhält man ein gleichſchenkliges rechtwinkliges Dreieck, deſſen Schenkel $x = p + p \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ ſind, und deſſen Grundlinie $AD \ldots EB = \infty - AB = -AB = -(p + p \cdot \sqrt{2})$ iſt. Fig. 2.

*) Die Punkte g und g¹ liegen bei Funck auf derſelben Seite von b, weil er ſich hiebei ausdrücklich die Erlaubniß nimmt, „vom Zeichen abzuſehen."

Digitized by Google

Daß in dieſer unſrer Figur, welche dadurch entſtanden iſt, daß drei Punkt B, C, A durch gerade Linien verbunden worden ſind, die Winkel an der unendlich langen Grundlinie nicht 45°, ſondern $\pi + 45^0 = 225^0$ ſind, kann nur einen Augenblick befremden. Sobald man das Vorurtheil überwunden hat, daß bei (ich ſage nicht: in) einem ebenen Dreieck ſtets die Summe der drei Winkel $= \pi$ ſein müſſe, ſobald man erkannt hat, daß dieſe Summe auch $= 3\,\pi$, oder $= 5\,\pi$ ſein könne, wird man an unſrer Deutung der untern Zeichen, die ſich auf das vorgelegte Problem ſelbſt bezieht, nichts ausſetzen können.

Fig. 3. 30ſte Aufgabe. Es ſollen zwei Linien x und y gefunden werden, ſo daß, wenn man zum Quadrat der erſten (x^2) das Quadrat der andern (y^2) hinzufügt, ein gegebenes Quadrat (a^2) zum Vorſchein kommt, doch dergeſtalt, daß das zweite Quadrat y^2 einem Rechteck gleich werde, deſſen Seiten a und x ſind.

Auflöſung. Es müßte alſo $x^2 + y^2 = a^2$ und $y^2 = ax$ ſein. Aus $x^2 + ax = a^2$ folgt dann $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Nimmt man nun x poſitiv, ſo iſt auch y^2 poſitiv und man wird ſich x und y als Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks und a als Hypotenuſe denken können. Nimmt man aber x negativ, ſo iſt auch y^2 negativ; ich werde mich dann wohl hüten, ſogleich nach dem y zu fragen, ſondern ſage: Ein negatives Quadrat y^2 zu x^2 zulegen, heißt von x^2 das nämliche poſitive Quadrat y^2 abziehen, demnach kann ich mir jetzt x als Hypotenuſe und y und a als Catheten vorſtellen. Unſere Aufgabe ſchließt alſo folgende zwei geometriſche Specialaufgaben in ſich:

α) In einem rechtwinkligen Dreieck iſt die Hypotenuſe a gegeben und bekannt, daß eine Cathete y die mittlere Proportionale zwiſchen der andern Cathete x und der Hypotenuſe a iſt.

β) Ein rechtwinkliges Dreieck zu machen, in welchem eine Cathete a gegeben iſt und worin die andere Cathete y die mittlere Proportionale zwiſchen der gegebenen Cathete a und der Hypotenuſe x iſt.

So verſchieden dieſe beiden Aufgaben α) und β) zu ſein ſcheinen, in der Auflöſung fallen ſie zuſammen und ſind inſeparabel. Hievon wollen wir uns nun auch durch rein geometriſche Betrachtungen zu überzeugen ſuchen.

Wir haben einmal bemerkt, daß in einem rechtwinkligen Dreiecke A, B, C, nicht bloß $A, C^2 + B, C,^2 = A, B,^2 = a^2$, ſondern auch $B, C,^2 = A, C, \times A, B,$ war und fordern Jemand, der unſer Dreieck gar nicht geſehen hat, auf, ein Dreieck ABC zu bilden, in welchem gleichfalls $AC^2 + BC^2 = AB^2 = A, B,^2 = a^2$ und $BC^2 = AC \cdot AB$ iſt. Wir werden mit dem Zeichner zufrieden ſein müſſen, wenn ſein Dreieck unſerm Dreieck A, B, C, entſpricht, ihn aber nicht tadeln dürfen, wenn er außerdem vielleicht noch ein anderes Dreieck entwerfen ſollte, welches unſerm Dreieck zwar nicht gleich iſt, aber doch allen an ihn gemachten Anforderungen entſpricht. Man vergleiche, was ich in Bezug hierauf § 7 über die Umkehrung der Sätze geſagt habe.

Conſtruction. Man theile die Linie $AB = a$ nach dem goldenen Schnitt und zwar nach § 33 ſowohl in E, als auch in F, beſchreibe über AB und AF einen Halbkreis, errichte in E und B die Lothe EC und BD bis zum Kreiſe und ziehe AC, BC und noch eine Linie

von A nach D, doch letztere über G und H, so genügen beide Dreiecke ABC und ABDH ... GA den zuletzt gestellten Anforderungen.

Beweis. 1) Weil AE : EB = EB : a und auch AE : AC = AC : a, so ist AC = BE. Weil ferner BE : CB = CB : a, so ist auch AC : CB = CB : AB. Außerdem ist natürlich auch $AC^2 + CB^2 = a^2$. Demnach kann ABC das verlangte Dreieck sein.

2) Es ist auch AB : BF = BF : AF, außerdem AB : AD = AD : AF, also AD = BF. Nun ist ferner AB : BD = BD : BF.
Folglich auch AB : BD = BD : AD, d. h. $BD^2 = AB \cdot AD$.

Aber in Beziehung auf das zweite Dreieck ABDHGA habe ich die Linie AD als negativ anzusehen, wie ja auch die ihr gleiche Linie BF negativ ist. Deshalb muß ich auch BD^2 als negativ ansehen und kann sagen, daß auch für's zweite Dreieck $AD^2 + BD^2 = AB^2 = a^2$ ist. Mithin könnte auch das zweite Dreieck ABDD ... GA das verlangte sein.

Will ich dieses zweite Dreieck mir als Antwort durchaus nicht gefallen lassen, so bleibt mir nichts andres übrig, als zu den schon gemachten Bedingungen hinterher noch ausdrücklich hinzuzufügen, daß die Seite AB = a Hypotenuse werden soll, was, hätte ich's gleich so gesagt, als ein Pleonasmus hätte erscheinen können. Wer freilich, wie Schmeisser (I. 21) die Aufgabe von vorne herein so präcisirt, wie wir es in α) gethan haben, dem darf man mit unserm zweiten Dreieck nicht kommen. Wenn er aber sagt, daß die zweite Auflösung auf den Widerspruch führe, daß eine negative Cathete größer sein müßte, als die Hypotenuse, und wenn er aus diesem vermeintlichen Widerspruche auf die Verwerflichkeit alles Negativen in der Mathematik schließen will, so geht er zu weit. Das Negative muß nun einmal sowohl in der idealen Arithmetik, als auch in der ihr entsprechenden realen Geometrie zugelassen werden. Daher ist es unmöglich, die Aufgabe α) durch das Dreieck ABC aufzulösen, ohne zugleich eine in ihr liegende zweite Aufgabe durch das Dreieck ABDH .. GA aufzulösen, von welcher die Aufgabe β), durch das Complementar-Dreieck ABD erledigt, nur eine populäre Uebersetzung ist. Beide Dreiecke ABC und ABD sind Zwillinge, die nicht einzeln in die Erscheinung treten. Je nachdem man nun von der Special-Aufgabe α) oder der Special-Aufgabe β) ausgeht, wird man sich eines von den beiden durch die Auflösung erhaltenen Dreiecken zu wählen haben, aber nicht wegen des übrig bleibenden Dreiecks auf die zu große Fruchtbarkeit der Wissenschaft schmähen dürfen.

Anmerkung 1. Da AE : EB = EB : AB, d. h. da a − x : x = x : a ist, so ist auch x : a = a : a + x. Und da nun einerseits a + x = BF = AD, andererseits AC = EB = x ist, so haben wir auch: AC : AB = AB : AD, deswegen sind die Dreiecke ABC und ABD ähnlich und die Linien AC und AD fallen zusammen.

Anmerkung 2. Vieta (Apollonius Gallus pag. 339) sagt, daß Regiomontanus († 1476) nach seinem eigenen Geständnisse unsere Aufgabe: **Invenire triangulum rectangulum, cujus tria latera sint proportionalia**, nicht rein geometrisch aufzulösen vermochte. Vieta sagt ferner, daß Raymarus sich irrthümlicher Weise geschmeichelt habe, in der Cathete BC den vierten Theil des Umfanges eines Kreises zu besitzen, dessen Durchmesser AB = a ist, und daß der-

Digitized by Google

ſelbe den Winkel ABC = 38° 2′ 22″ gefunden habe. Da aber Sin ABC = 2. Sin 18° iſt, ſo muß ABC = 38° 10′ 22″ ſein.

§ 36.

Um zu zeigen, daß der Grundſatz des Descartes: negative Quantitäten ſeien von derſelben Natur wie die poſitiven, nur im entgegengeſetzten Sinn, in entgegengeſetzter Richtung genommen, nicht allgemein richtig ſei, daß er ſei, wie ſich Arago ausdrückt, malheureusement sujet à des exceptions, beſchäftigen ſich D'Alambert (Encyclopädie. Art. Negativ), Carnot (I. 7) und Förſtemann (pag. 102) mit folgender Aufgabe:*)

31ſte Aufgabe. Von einem Punkte A außerhalb eines Kreiſes eine Sekante zu ziehen,
Fig. 4 α. deren Sehne eine gewiſſe Länge hat.

Auflöſung. Man nenne das Stück von A bis zum erſten Schnittpunkt AE = x, die Sehne DE = b, die Entfernung des Punktes A vom Kreiſe AB = e, den Durchmeſſer ABF = 2 r, ſo iſt

$$x\,(x + b) = e.\,(2r + e).$$ Hieraus folgt:

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{e^2 + 2er + \frac{b^2}{4}}.$$ Setzt man $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 - h^2$, wo CG = h, ſo wird

$$x = -\sqrt{r^2 - h^2} \pm \sqrt{(r + e)^2 - h^2}.$$

Es iſt aber $\sqrt{(r + e)^2 - h^2} = AG$ und $\sqrt{r^2 - h^2} = EG = DG$, mithin iſt

$$x = -EG \pm AG = +AE, \text{ aber auch} = -AD.$$

„Der erſte Werth, der poſitiv iſt, ſagen D'Alembert und Carnot, löſt ohne Schwierigkeit die Frage auf; aber was bedeutet der zweite, der negativ iſt? Es ſcheint, daß er nur dem Punkte D entſprechen könne, wo AD zum zweiten Male den Umkreis ſchneidet. Denn (Schumacher überſetzt: Aber) ſucht man gerade zu AD = y, ſo folgt aus y (y—b) = e. (2r + e),

$$y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{e^2 + 2er + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = DG + AG = +AD$$
$$= EG - AG = -AE,$$

deſſen poſitiver Werth genau derſelbe iſt, der ſich in dem erſten Falle mit dem negativen Zeichen darſtellte. Alſo obgleich von den zwei Wurzeln der Gleichung für x eine poſitiv, die andere negativ iſt, müſſen ſie doch beide nach derſelben Richtung in Bezug auf den feſten Punkt A genommen werden.**) Alſo führt die Regel, vermöge der dieſe Wurzeln nach entgegengeſetzten Richtungen genommen werden ſollen, zu falſchen Reſultaten. Nimmt man im Gegentheil den feſten Punkt a auf dem Durchmeſſer bf ſelbſt und nicht auf
Fig. 4 β. ſeiner Verlängerung, ſo würde man für x zwei poſitive Werthe finden und doch müßte man ſie in entgegengeſetzter Richtung von einander nehmen. Die Regel iſt alſo auch falſch für dieſen Fall."

*) Auch Newton (Arithmetica universalis, pag. 183) ſagt nur: Ex radicibus vero, quae reales sunt, affirmativae et negativae ad plagas oppositas solent tendere.

**) Arago über Carnot ſagt pag. 592: Or qui ne voit, que ces deux longueurs, l'une positive, l'autre négative, doivent cependant être portées du même côté du point de départ de la droite?

Hiezu fügt Förſtemann (pag. 104): „Auch dieſes Beiſpiel zeigt, daß nicht immer jeder Werth, den man bei der algebraiſchen Auflöſung einer geometriſchen Aufgabe erhält, als richtige Auflöſung angeſehen werden darf.... Daß die Regel (des Carteſius) zuweilen anwendbar iſt, zeigen manche Beiſpiele. Wer aber behaupten wollte, daß dieſe Regel immer anwendbar ſei, behauptete freilich eine Unrichtigkeit. Dies iſt aber kein Grund, den gewöhnlichen Begriff negativer Größen falſch oder dunkel zu nennen, welchen Vorwurf Carnot demſelben macht."

Durch Ein Wort laſſen ſich alle Schwierigkeiten und Bedenken gegen die negative Auflöſung wegräumen. Wir fragten, wie weit der erſte Schnittpunkt von A entfernt ſei und verſtanden unter erſtem Schnittpunkt den Punkt E. Aber auch der von uns bisher als zweiter Schnittpunkt angeſehene Punkt D kann als erſter Schnittpunkt mit vollem Rechte angeſehen werden; man muß aber zu dem Ende von A aus nicht nach E gehen, ſondern nach entgegengeſetzter Richtung, nach H hin und in dieſer Richtung einen unendlich langen Weg machen, ſo wird man ſicher zuerſt den Kreis in D ſchneiden und bei fortgeſetzter Bewegung E als zweiten Schnittpunkt aufzufaſſen haben. Bezeichnet man nun den unendlich langen Weg von A über H hinaus bis A mit ∞, ſo wird die Entfernung von A bis zu dem jetzigen erſten Schnittpunkt D ſein $= \infty -$ AD. Man kann aber zu dieſem neuen erſten Schnittpunkt D von A aus auf einem kürzern Wege gelangen, wenn man von A aus nicht über H, ſondern nach entgegengeſetzter Richtung über E nach D geht, dann beträgt dieſe Entfernung, abſolut genommen, AD, und weil, wenn man von A aus zuerſt D erreichen will, man doch eigentlich nach H gehen muß, und weil alſo die Richtung von A nach H hiebei als poſitiv gilt, ſo muß das Gehen nach der entgegengeſetzten Richtung, nach E G D als negativ betrachtet werden. Konnte alſo die Mathematik auf die Frage: wie weit der erſte Schnittpunkt von A entfernt ſei, außer der ſogleich in die Augen ſpringenden Antwort ($= +$ AE) eine beſſere Antwort geben als $=$ — AD, und mußte ſie nicht auch dieſe zweite Antwort geben? Daß wir dieſe zweite Antwort nicht ſogleich verſtanden, iſt nicht ihre Schuld; es lag das an unſerer Befangenheit, daß wir zwar in der Theorie die gerade Linie als unendlich definiren, aber in der Anwendung vor den Conſequenzen dieſer Definition zurückſchrecken und auf halbem Wege ſtehen bleiben. Die Wiſſenſchaft hat aber die Aufgabe, uns von unſern Vorurtheilen zu befreien und uns ſo allmälig zur vollen Wahrheit zu führen.

Eben ſo leicht iſt es für den Fall, daß der feſte Punkt a im Kreiſe liegt, den oben citirten Widerſpruch zu beſeitigen. So wie bei Fig. 4 α auf die Frage: wie weit der außerhalb des Kreiſes liegende Punkt A von dem erſten Schnittpunkt entfernt iſt, zwei poſitive Antworten erfolgten, AE und $\infty -$ AD, für welche letztere dann — AD genommen werden konnte, ſo ſind auch bei Fig. 4 β nur zwei poſitive Antworten möglich, weil die Größe der Entfernung zunächſt immer abſolut aufzufaſſen iſt. Die Entfernung eines (erſten) Schnittpunktes von a iſt entweder $= +$ ad oder $= +$ ae. Daß dieſe Entfernungen auf entgegengeſetzter Seite von a liegen, ſpricht hier eben ſo wenig für Antworten mit entgegengeſetzten Zeichen, als dort die gleiche Richtung von AD und AE das Minuszeichen vor AD entkräften konnte. Ja, wenn man bei Fig. β fragen möchte: wie weit a von einem zweiten Schnittpunkte entfernt iſt, wie weit man z. B. auf der Linie de von a aus nach einer und derſelben Richtung (e) hin zu gehen

Digitized by Google

hat, bevor man auf dieſem Wege zu dem zweiten Schnittpunkt d gelangt, dann würde man ſtatt der eigentlichen Antwort: ∞ — a d ſich auch die Antwort: — a d gefallen laſſen können.

Ich glaube hiemit vollſtändig die Quelle des Irrthums der in dieſem Paragraphen citirten Autoren nachgewieſen zu haben. Sie verwechſeln den erſten Schnittpunkt mit dem zweiten; ſie verlangen von der Analyſis, daß auf ihre Frage: wie weit die feſten Punkte A oder a von einem erſten Schnittpunkt, etwa E oder e entfernt (+ AE und + a e) ſind, ſie zugleich darauf antworten ſoll: wie weit dieſe feſten Punkte von dem zweiten Schnittpunkte D oder d entfernt ſind? was allerdings + AD und — a d wäre. Und das iſt doch zu viel verlangt. Alſo nicht die Analyſis (vergl. pag. 5 Anm.) „antwortet auf Fragen, welche man an ſie nicht geſtellt hat;" ſondern ſelbſt bedeutende Analytiker haben bisher von ihr Antwort auf nicht geſtellte Fragen erwartet.

Fig. 4 γ.

A n m e r k u n g. Eigenthümlich iſt noch die Art, wie Bézout (Cours de Mathematiqnes III. pag. 321 1798) die negative Auflöſung erklärt. Er verlängert alle Linien über A hinaus rückwärts um ſich ſelbſt, zeichnet auch um C^1 einen eben ſolchen Kreis, wie der gegebene iſt, und während AE die poſitive Auflöſung iſt, ſoll nach ihm AD^1 die negative Auflöſung vorſtellen, da ſie ja zu AE eine entgegengeſetzte Lage hat. Wir kommen auf ſeine Anſicht noch bei einer anderen Gelegenheit zurück und bemerken jetzt nur, daß in unſerer Aufgabe nur von e i n e m Kreiſe die Rede war und nicht von z w e i Kreiſen.

§ 37.

Ich habe in Betreff der eben behandelten Aufgabe noch auf einen Umſtand aufmerkſam zu machen. Bisher iſt $b = 2\beta$ als die Sehne DE ſtillſchweigend kleiner als der Radius r vorausgeſetzt worden. Wie aber, wenn $\beta > r$ würde? Der Geometer wird ſagen: dann iſt die Auflöſung der Aufgabe unmöglich. Aber der arithmetiſche Ausdruck des vorigen Paragraphen $x = -\beta \pm \sqrt{e^2 + 2er + \beta^2}$ führt auch unter dieſer neuen Vorausſetzung auf nichts Imaginäres. Sollen wir unter gewiſſen Umſtänden auch das Recht haben, ſelbſt reelle poſitive Wurzeln zu verwerfen? Bevor ich hierüber Aufſchluß zu geben verſuche, wollen wir hören, was Newton pag. 183 in Bezug auf ſolche Erſcheinungen ſagt: Sunt tamen radices aequationum aliquando possibiles ubi Schema impossibiles exhibet. Sed hoc fit ob limitationem aliquam in Schemate quod ad aequationem nil spectat. Ut si in semicirculo ADB datis diametro AB et linea inscripta AD, foret $\frac{AD^2}{AB} = AC$. Et per hanc aequationem AC realis exhibetur quantitas, ubi linea inscripta AD major est quam diameter AB; per Schema vero AC tunc evadit impossibilis. Nimirum in schemate linea AD supponitur inscribi in circulo, atque adeo diametro circuli major esse non potest; in aequatione vero nihil est quod a conditione illa pendeat. E x h a c s o l a l i n e a r u m c o n d i t i o n e colligitur aequatio, quod sint AB, AD et AC continue proportionales. Et quoniam aequatio non complectitur omnes conditiones schematis, non necesse est ut omnium conditionum teneatur limitibus. Quidquid amplius est in schemate quam in aequatione, potest illud limitibus arctare, hanc non item.

In Bezug auf unſere Aufgabe würde man alſo im Sinne Newton's zu ſagen haben: der gefundene arithmetiſche Ausdruck löſe ohne Einſchränkung nur die Aufgabe, zwei Linien oder Zahlen zu finden, deren Produkt $p^2 = e\,(e + 2r)$ und deren Unterſchied $= 2\beta$ ſei; wolle man den Ausdruck aber in Verbindung mit unſerm geometriſchen Probleme bringen, dann müſſe man ſich die Einſchränkung gefallen laſſen, β nicht größer als r anzunehmen.

Ich aber ſage ſo: So lange $\beta < r$ war, konnte ich in § 36 ein rechtwinkliches Dreieck CGE machen, in welchem r die Hypotenuſe und β die Cathete war, es war dann $CG^2 = h^2 = r^2 - \beta^2$ etwas poſitives; ich konnte dann ferner das andre rechtwinkliche Dreieck CGA machen, in welchem $AG = \sqrt{E^2 - h^2}$ und $x = -\beta \pm \sqrt{E^2 - h^2}$ war, wobei $E = r + e$ angenommen wird. Daß dies alles am einfachſten dadurch zu bewerkſtelligen iſt, daß man aus C mit dem leicht zu conſtruirenden Radius b einen Kreis beſchreibt und dann aus A an denſelben eine Tangente legt, iſt kaum nöthig zu erinnern. Fig. 4 α.

So bald aber $\beta > r$ wird, bleibt für h^2 etwas negatives übrig, etwa $= -H^2$. Wir haben dann $r^2 - \beta^2 = -H^2$, oder $\beta^2 - r^2 = H^2$. Von dem Augenblicke an muß β die Hypotenuſe und r eine Cathete werden; es entſteht das Dreieck GCB, in welchem $GC = H$ iſt. Natürlich muß nun in dem andern Dreieck CGA die Linie $AG = \sqrt{E^2 + H^2}$ und die unbekannte AE oder — AD, die dadurch gefunden wird, daß man aus G mit $BG = FG = \beta$ einen Kreis beſchreibt, $x = -\beta \pm \sqrt{E^2 + H^2}$ ſein. Fig. 4 δ.

Um den naheliegenden Vorwurf abzuwehren, daß der Kreis um den Mittelpunkt G nicht der gegebene Kreis um den Mittelpunkt C ſei, bemerke ich vor allem, daß ich auch im vorigen § nicht gezwungen war, die zur arithmetiſchen Auflöſung führende Hilfslinie ABF gerade durch den Mittelpunkt C gehen zu laſſen, man konnte auch dort zum erwünſchten Ziele gelangen, wenn BF bloß eine gewöhnliche Sehne und nicht gerade der Durchmeſſer geworden wäre. Sollen freilich beide Figuren und die ſich daran knüpfenden Auflöſungen völlig gleichberechtigt erſcheinen, ſo muß zunächſt auch der Kreis um C noch zurücktreten und unſer Problem etwa folgende Faſſung bekommen:

Auf einer Linie ſind die Punkte F, B und A gegeben, man ſoll durch die Punkte F und B einen möglichſt kleinen Kreis legen, ſo daß wenn man aus A an denſelben eine Sekante AED zieht, ihre Sehne DE eine gegebene Länge 2β habe; auch ſoll man noch angeben, wie weit A von dem erſten Schnittpunkte der Sekante entfernt iſt.

§ 38.

Wir müſſen noch auf den ſchon gelegentlich zur Sprache gekommenen Fall, wenn der feſte Punkt a innerhalb des Kreiſes liegt, zurückkommen. Es ſei $ac = E$, $bc = cf = r$, $ead = 2\beta$, ae oder $ad = x$, ein durch a gehendes, vom Kreiſe begrenztes Loth auf $bf = 2p$ und $r^2 - \beta^2 = h^2$. Fig. 4 β.

Da nun $x\,(2\beta - x) = (r - E)\,(r + E) = r^2 - E^2 = p^2$ iſt, ſo haben wir: $x = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - p^2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - r^2 + E^2} = \beta \pm \sqrt{E^2 - h^2} = \beta \pm d$, wo $d = ag$ iſt.

1) So lange $\beta > p$, aber $< r$ iſt, ſtoßen wir weder von Seiten der Geometrie (des Schema's), noch von Seiten der Arithmetik (der Gleichung) auf eine Schwierigkeit. Wir be-

Fig. 4 β. ſchreiben aus c mit dem Radius h einen Kreis, ſuchen auf dem Umfange deſſelben einen Punkt g, deſſen Diſtanz von a, nämlich d die Eigenſchaft hat, daß $d^2 = E^2 - h^2 = \beta^2 - p^2$ iſt, ziehen a g und in g eine Tangente e g d. Da dieſe Tangente mit der Linie a g zuſammenfällt, ſo iſt klar, daß $x = ae = \beta - d$ und $x = ad = \beta + d$ iſt. Es iſt hier, wie man ſieht, ſowohl h^2 als auch d^2 poſitiv.

2) Iſt aber $\beta > r$, alſo $\beta^2 - r^2 = H^2$ und $x = \beta \pm \sqrt{E^2 + H^2}$, dann bilden wir uns erſt die congruenten Dreiecke b e g und f e g, in welchen $bg = bf = \beta$, alſo $eg =$ Fig. 4 ε. H iſt, ziehen durch a eine Linie $ag = \sqrt{E^2 + H^2} = D$ und mit dem Radius β aus g einen Kreis, in welchem bei gehöriger Verlängerung von a g die Linie a d oder a e, alſo $x = \beta \pm \sqrt{E^2 + H^2} = \beta \pm D$ iſt. Hier iſt h^2 negativ, aber d^2 poſitiv. Wir haben hiemit eine Figur erhalten, gegen die der Geometer nichts wird einwenden können, zumal wenn wir die Aufgabe in folgende, dem Schluſſe des vorigen § analoge Faſſung bringen: Auf einer Linie ſind die Punkte b, a, f gegeben; man ſoll einen möglichſt kleinen Kreis durch die äußern Punkte b und f legen, ſo daß, wenn man dann durch a eine Sehne zieht, dieſe eine vorgeſchriebene Länge $= \beta$ erhalte.

3) Schwieriger wird es ſein, die Algebra mit ihrem imaginären Ausdruck in dem Falle durch eine angemeſſene Zeichnung zu befriedigen, wenn $\beta < p$ iſt, d. h. wenn h^2 poſitiv, aber d^2 negativ iſt, da dann eben die kleinſte Sehne, die man durch a legen kann, $2p = h a k$ iſt. Natürlich wird Niemand mehr verlangen, als daß wir bei einer Aufgabe, die Unmögliches for-
Fig. 4 ζ. dert, unſer möglichſtes thun. — Wir beſchreiben wieder, wie in 1), aus c mit dem Radius h einen Kreis; wenn wir ſpäter in irgend einem Punkte ſeiner Peripherie eine Tangente bis an den Umfang des gegebenen Kreiſes ziehen, ſo iſt dieſe Linie für den gegebenen Kreis eine Sehne und hat die verlangte Länge $= 2\beta$. Um aber den richtigen Punkt g, durch welchen die Tangente zu ziehen iſt, zu finden, müſſen wir ſeine Diſtanz vom Punkte a, der nun innerhalb des kleinen Kreiſes liegt, kennen. Es iſt jetzt $d^2 = \beta^2 - p^2 = E^2 - h^2$ etwas Negatives, etwa $= -\delta^2$. Darin, daß d^2 negativ iſt, iſt deutlich ausgeſprochen, daß a nicht auf der durch g zu ziehenden Tangente liegen kann. Das iſt, wie wir in 1) geſehen haben, nur möglich, wenn d^2 poſitiv iſt, weil nur dann der Winkel e g a ein Rechter ſein kann und weil nur dann g a mit der durch g gelegten Tangente zuſammen fallen kann. Die negative Antwort giebt aber durch ihre Quantität auch zu erkennen, wie groß das Hinderniß iſt, welches verurſacht, daß die Aufgabe nicht mehr möglich zu löſen iſt. In unſerm Falle können wir aus $\delta^2 = h^2 - E^2$ lernen, wie weit wir uns *wenigſtens* von dem richtigen Punkte a zu entfernen haben, um auf dem Umfange des innern Kreiſes denjenigen Punkt zu finden, durch welchen die Tangente gezogen werden muß. Da $al = h - E$, aber $\delta = \sqrt{(h-E)(h+E)}$, alſo $\delta > al$ iſt, ſo finden wir ſtets ſolche Punkte g und g', wenn wir aus a mit dem Radius δ einen Kreis beſchreiben. Natürlich ſind die dadurch entſtandenen Dreiecke e a g und e a g' bei a rechtwinklich, die Linie h g a k iſt $= 2p$ und die Tangente d g e iſt diejenige Linie, welche den Umſtänden noch am meiſten entſpricht. Ihre Länge iſt $= \beta$, wer von d nach a und dann von a nach e gelangen und dabei in beiden Fällen möglichſt lange, alſo gleich lange auf der Tan-

Digitized by Google

gente verweilen will, wird finden, daß der erſte Weg x mit $\beta + \delta$, der andere Weg x mit $-\delta + \beta$ zu bezeichnen iſt, indem man bei beiden Wegen die Linie ga in entgegengeſetzter Richtung zu durchlaufen hat. Wer aber noch immer den Punkt a auf der Tangente ſucht oder die verlangte Sehne nur durch a legen will, erhält zur Antwort, daß dann $d = i.\delta$, $x = da = \beta + i.\delta$, und $x = ae = -i.\delta + \beta$ iſt.

Ich hätte weiter nichts hinzuzufügen, wenn ag auf de ſenkrecht ſtände, weil man gewohnt iſt, bei bloß äußerlicher Darſtellung der Gegenſätze das Imaginäre auf die Richtung der reellen Größen ſenkrecht zu ſtellen. Da ſich hier aber für das Imaginäre zwar eine laterale, aber nicht gerade perpendiculäre Richtung herausgeſtellt hat, ſo ſehe ich mich genöthigt, damit auch der Bedenklichſte meine Conſtruction des imaginären Ausdrucks annehmen könne, zu der ſchon in 2) gegebenen Faſſung der Aufgabe noch Folgendes hinzuzuſetzen: Da es nicht möglich iſt, ſelbſt bei dem kleinſten Kreiſe um bf, durch a eine Sehne zu legen, welche $< hak$ iſt, ſo ſoll man, wenn deſſenungeachtet $\beta < p$ iſt, auf dieſer kleinſten Sehne hak einen Punkt g, möglichſt nahe an a angeben, durch welchen ſich eine ſolche Sehne 2β ziehen läßt.

§ 39.

Nach demſelben Prineipe, welches den vorigen Paragraphen zum Grunde liegt, erkläre ich das Zeichen der Secante in den verſchiedenen Quadranten.

Lacroix (pag. 114) ſagt in dieſer Beziehung: „Ueberhaupt, ſo oft von Abſtänden die Rede iſt, die ſich auf einen feſten Punkt beziehen, und auf einerlei oder parallelen Linien gerechnet werden, müſſen die mit dem Zeichen — behafteten eine den mit dem Zeichen + behafteten entgegengeſetzte Lage annehmen.... Dieſe Betrachtungen laſſen ſich nicht unmittelbar auf die Secante anwenden, weil ſich ihre Richtung in jedem Augenblick ändert; indeſſen hat ſie nichts deſto weniger ein ihren verſchiedenen Lagen eigenthümliches Zeichen, welches ſich aus ihrem analytiſchen Ausdruck $\left(\frac{1}{\text{cosinus}}\right)$ herleiten läßt; allein nur bei Linien, welche immer dieſelbe Richtung behalten, ſtimmt die Aenderung des Zeichens unmittelbar mit der Aenderung der Lage überein."

Dieſe Darſtellung deckt die Schwierigkeiten, die in der Sache liegen, auf, aber auf eine Löſung derſelben kann ſie nicht den geringſten Anſpruch machen. Der Löſung näher kommt ſchon ſein Ueberſetzer Ideler, welcher pag. 115 in einer Anmerkung ſagt: „Es ſcheint mir, daß ſich von den Aenderungen des Zeichens der Secante eine ganz natürliche Erklärung geben läßt, wenn man erwägt, daß dieſe Linie wirklich eine entgegengeſetzte Lage annimmt, wenn ſie die Tangente nach dem entgegengeſetzten Ende hin erreicht. In der That iſt es bei dem Bogen im zweiten und dritten Quadranten, für welchen der analytiſche Ausdruck der Secante negativ iſt, nicht der Halbmeſſer ſelbſt, der die Tangente eereicht, ſondern der ihm entgegengeſetzte." Aber dieſer entgegengeſetzte Halbmeſſer erſcheint bei Ideler noch als etwas fremdartiges, nur herbeigezogenes.

Ich denke mir die Sache ſo: Weil die Secante in jedem Augenblick ihre Richtung verändert, ſo kommt es bei ihr auf die Richtung gar nicht an. Wer die Secante eines Winkels haben will, will nichts weiter wiſſen, als wie weit gewiſſe zwei Punkte, abſolut genom- Fig. 5.

men, von einander entfernt ſind, nämlich der Mittelpunkt des Kreiſes C und der Punkt, in welchem der bewegliche Radius CB, über B hinaus verlängert, die Tangete für den feſten Punkt A trifft. Dieſe Entfernung wächſt mit dem Winkel und wird ſchon für 90^0 unendlich genannt, beträgt aber noch lange nicht, was ich in § 33 eine volle Unendlichkeit (∞) genannt habe, ich bezeichne daher vorläufig dieſe Entfernung für 90^0 nur mit u. Da man nun ſchon längſt gewohnt iſt, die geraden Linien als Kreiſe mit ungemein großem Radius anzuſehen, ſo wird man auch mir es nicht verargen können, wenn ich mir die Tangentenlinie und die Secantenlinie für 90^0 unter dem Bilde von Meridianen vorſtelle, die Ebene des Kreiſes als eine Kugel und den feſtſtehenden Radius AC als einen endlichen Theil des Aequators. Habe ich mich mit dieſem der Unendlichkeit nicht unwürdigen Bilde vertraut gemacht, ſo erkenne ich ſogleich, daß es außer dem ſchon in Betrachtung gezogenen Schnittpunkt (N) noch einen zweiten (S) geben muß, welchen ich aber auf dem angedeuteten Wege erſt erreiche, wenn ich in Gedanken ∞—u durchwandert habe, kürzer erreiche ich aber dieſes Ziel, wenn ich in entgegengeſetzter Richtung den Weg u durchlaufe, daher kann man ſagen, und ſagts auch, daß Sec. $90^0 = \pm$ u iſt. Man erkennt nebenbei, daß $u = \frac{\infty}{4}$ iſt.

Wird der Winkel ſtumpf = ABC, ſo denke ich mir auf meiner fingirten Kugel die Secantenlinie als einen Horizont. Die Entfernung des Cardinalpunktes C von dem Punkte, wo der bewegliche Radius CB über B hinaus verlängert die Tangente zum erſten Male trifft, wird nun (allmälig) größer als u; bezeichne ich die abſolute Länge der Linie CD mit e, ſo beträgt ſie $2 . u - e$. Da dieſer Schnittpunkt aber außer unſerm Geſichtsfelde liegt, ſo iſt er denn auch bisher überſehen worden. Wir wollen daher den beweglichen Radius noch über dieſen erſten Schnittpunkt hinaus verlängern, bis wir die Tangente zum zweiten Male in D erreichen. Die Länge des Weges, den wir durchlaufen haben, beträgt jetzt ∞—e. Da wir aber dieſen einen ſichtbaren Schnittpunkt leichter erreichen können, wenn wir in entgegengeſetzter Richtung gehen, ſo ſagen wir: Sec. ACB = — e. Man erläßt mir gewiß das weitere Eingehen auf die Sekanten im dritten und vierten Quadranten, und geſtattet mir wohl noch die Bemerkung, daß nach allem, was vorliegt, man unter Sekante eines Winkels zu verſtehen hat die Entfernung des Punktes C von demjenigen Schnittpunkt des über B hinaus verlängerten beweglichen Radius, welcher dem feſten Punkte A am nächſten liegt (welches dann bald der erſte, bald der zweite Schnittpunkt iſt); nur wenn der Winkel 90^0 iſt, ſind beide Schnittpunkte gleich berechtigt und müſſen daher beide beachtet werden.

Daß, in ſo fern namentlich Sec. $x = \pm \sqrt{1 + tg\ x^2}$, eigentlich jede Sekante nach Belieben als poſitiv oder negativ zu betrachten iſt, gehört nicht hierher und hat ſeine Erledigung ſchon im Eingange des § 33 erhalten. Es iſt mir ja gegenwärtig genau die Richtung vorgezeichnet, in welcher ich von C aus auf dem beweglichen Radius zu gehen habe, um die Tangente möglichſt nahe an A zu erreichen, nämlich immer über B hinaus; daher habe ich keine Wahl.

Hebt man die oben gemachte Beſchränkung auf, wornach der Schnittpunkt ſich in endlicher Entfernung von A befinden ſoll, dann haben nicht nur die Sekanten ſämmtlicher Winkel, ſondern auch deren Tangenten ſtets zwei Werthe, die ſich nicht bloß durch + und — von einander un-

terſcheiden, ſondern durch $\frac{\infty}{2}$, durch die Hälfte derjenigen Strecke, die ich eine volle Unendlichkeit genannt habe. Erſt die Aufhebung dieſer Schranke macht es vollſtändig klar, daß allmälige Aenderungen der Winkel auch ſtets nur allmälige Aenderungen der genannten trigonometriſchen Linien zur Folge haben, daß die Sprünge aus $+ u$ in $- u$, zu deren Annahme man nach der gewöhnlichen Anſicht*) gezwungen iſt, nur bei der Vernachläßigung eines der beiden Werthe zum Vorſchein kommen.

§ 40.

Wie wenig man ſich in die negative Auflöſung ſelbſt bei minder ſchwierigen Fällen zu finden wußte, davon nur ein Beiſpiel aus Klügel (Mathem. Wörterbuch I. pag. 128). Ihn beſchäftigt folgende Aufgabe:

32ſte Aufgabe. Ein Halbkreis ABC iſt gegeben und auf dem Durchmeſſer ein Punkt D; man ſoll durch D einen Halbkreis wie DEF, aus einem Mittelpunkte G auf AC beſchreiben, ſo daß auf der berührenden CEB das Stück EB von dem Berührungspunkte bis an den Umfang des gegebenen Kreiſes dem Stück AD gleich ſei. Fig. 6.

Auflöſung. Setzt man $AD = BE = a$, $DC = b$, $DF = 2x$ und den Mittelpunkt von DEF in G, ſo findet Klügel aus der Proportion $CE : CG = EB : AG$ nach einer Quadrirung die Gleichung $b.(b - 2x).(a + x)^2 = a^2.(b - x)^2$, welche, „gehörig reducirt", wie er ſagt, dieſe wird:

I. $2.b.x^2 + (a^2 + 4ab - b^2)x - 2a.b^2 = o.$

Wenn man wirklich gehörig reducirt, ſo findet man in jedem Gliede den Exponenten von x um eins höher. Alſo iſt unter andern $x = o$, was auch einen ſehr guten und leicht zu erklärenden Sinn hat. Dieſe Auflöſung wird aber ohne Weiteres von Klügel verworfen. Und von den beiden andern, noch übrigen Wurzeln läßt er auch nur die poſitive gelten; die andre negative ſei hier nicht brauchbar. Denn wenn $x = DG$ negativ genommen würde, ſo würde AG kleiner als AD oder kleiner als EB ſein, welches nicht möglich ſei. Durch die Quadrirung ſei die Gleichung auf einen höhern Grad gebracht, als der Frage zukommt. Die negative Wurzel diene nur als Mittel, die Relation von x gegen a und b rational zu machen, und ſei für die geometriſche Frage als eine fremde Wurzel anzuſehen.

Daß die negative Wurzel keine fremde ſei, davon werden uns folgende Betrachtungen überzeugen. Da es ſich hier um den Abſtand des Punktes G von dem feſten Punkte D auf einer der Lage nach gegebenen Linie AC handelt, ſo muß, wie ſchon Lacroix in der § 39 citirten Stelle richtig bemerkt, das negative x auf der Linie AC von D aus eine der poſitiven entgegengeſetzte Lage bekommen. Während das poſitive $x = DG$ rechts von D liegt, muß in Bezug auf das negative x der Mittelpunkt des geſuchten Halbkreiſes links von D liegen.

*) So ſagt noch Pr. Dr. O. Schlömilch (Grundzüge einer wiſſenſchaftlichen Darſtellung der Geometrie des Maaßes I. pag. 181, 1854): Bei 270^0 ſpringt die Sekante wieder aus dem Negativen ins Poſitive über, nämlich $\text{Sec.}(270^0 - o) = -\infty$, $\text{Sec.}(270^0 + o) = +\infty$.

Auch Lübſen (Analytiſche Geometrie 1862 pag. 88) ſpricht bei einer ähnlichen Gelegenheit von einem ſofortigen und plötzlichen Umſchlagen von $+\infty$ in $-\infty$.

Digitized by Google

Wir tragen daher den abſoluten Werth des negativen x von D aus nach links auf AC auf; — — es reiche bis g —, beſchreiben mit gD einen Halbkreis und ziehen von C an denſelben die Tangente Ce. Sollte ſich nun finden, daß $eb = AD = a$ iſt, ſo möchte die negative Wurzel doch wohl nicht als eine fremde beſeitigt werden dürfen. Zu dieſer Einſicht werden wir am ſchnellſten kommen, wenn wir die eigentliche Aufgabe ſo ausſprechen:

Durch den Punkt D ſoll ein Halbkreis, deſſen Mittelpunkt nicht jenſeits D, ſondern diesſeits D liegt, beſchrieben werden, ſo daß dasjenige Stück der berührenden Linie Ce, welches zwiſchen beiden Kreiſen liegt $(be) = AD = a$ werde

Jetzt iſt $Ag = x - a$, $Cg = b + x$. Weil nun

1) $Ce^2 = CD \,.\, Cf = b \,.\, (b + 2x)$

2) $Ce^2 : Cg^2 = eb^2 : Ag^2$, d. h. $b \,.\, (b + 2x)\,(x - a)^2 = (b + x)^2 \,.\, a^2$,

ſo folgt hieraus

II. $x \,.\, [2bx^2 + (b^2 - 4ab - a^2)\,x - 2ab^2] = o.$

Man ſieht, dieſe Gleichung II. hat, abſolut genommen, die nämlichen Wurzeln wie die Klügel's, nur ſind ſie an Zeichen entgegengeſetzt. Trägt man mithin den jetzigen poſitiven Werth von x von D aus links auf AB auf, ſo muß der andere Endpunkt auf den ſchon beſprochenen Punkt g fallen, und es iſt ſomit bewieſen, daß wirklich auch $eb = a$ iſt. Daher enthält die negative Wurzel der Gleichung I. keine unſrer Aufgabe fremde Löſung, ſie kann ſogar durch die uns ſchon geläufig gewordene Bemerkung, daß wir von D aus auch nach g gelangen können, wenn wir in Gedanken fortwährend $(\infty - DG)$ rechts gehen, zu einer mit der poſitiven Löſung theoretiſch ganz gleich berechtigten erhoben werden.

Doch ich habe noch mehr zu ſagen: Klügel löſt die Aufgabe noch einmal, indem er die Entfernung des unbekannten Punktes F von $C = x$ nennt. Er kommt dabei auf folgende Gleichung:

$$b \,.\, x^3 - (a^2 + 4ab + 2b^2)\,x^2 + (2a^2 \,.\, b + 4ab^2 + b^3) \,.\, x - a^2 \,.\, b^2 = o.$$

Die Wurzel $x = b$ iſt nach ihm wieder eine fremde, zur Frage nicht gehörige, weil ſie den Durchmeſſer des geſuchten Kreiſes $= o$ machen würde; von den beiden andern Wurzeln, die *beide poſitiv* ſind, behält er nur die kleinere (FC), die größere (fC) verwirft er abermals, *trotz dem, daß ſie poſitiv iſt*, nur, weil ſie die größere iſt! — Soll etwa, wie er es vorhin von der negativen Wurzel Dg behauptete, nun auch die größere poſitive Wurzel fC, „nur als Mittel dienen, die Relation von x gegen a und b rational zu machen"? — Warum gerade die größere und nicht die kleinere? Und iſt denn das Rationalmachen etwas falſches, daß es falſche Antworten auf meine Frage hervorbringen könnte? Und konnte Klügel nicht auch gleich, ſtatt erſt anzunehmen, daß vier Linien in Proportion ſtehen, annehmen, daß ihre Quadrate proportionirt ſind, wie ich es eben gethan habe? So ſtellt der Eifer gegen das Negative ſelbſt das Poſitive in Frage.

Anmerkung. In Ohm's Schrift: Der Geiſt der mathematiſchen Analyſis, 1842, pag. 10, finde ich folgende Stelle: „Stellt x den Radius eines Kreiſes vor, ſo iſt eine ſtillſchweigende Nebenbedingung, daß x eine *poſitive* ganze oder gebrochene Zahl ſein muß. Giebt alſo die Gleichung für x einen einzigen Werth nur, und iſt dieſer imaginär oder *negativ*, ſo iſt in

Digitized by Google

beiden Fällen, in dem letztern so gut wie in dem erstern, die Aufgabe selbst geradezu unmöglich, und die früher so gewöhnliche Ansicht, als dürfe man das negative Resultat nur im entgegengesetzten Sinne nehmen, um doch eine Auflösung der gegebenen Aufgabe zu haben, ist als eine der irrigsten und unbegründetsten zu bezeichnen." Ich darf mich wohl jeder Gegenbemerkung enthalten.

§ 41.

Lambert (Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung I. § 298, 1765) stellt folgende

33ste Aufgabe. Es seyen die vier Objecte A, B, C, D in gerader Linie und der Abstand AB = a, CD = c gegeben, hingegen der mittlere Theil BC = x unbekannt... Man geht in O und mißt die Winkel AOB = u, AOC = v, AOD = w. Fig. 7.

Auflösung (1). Es sei OP eine aus O auf AD fallende Perpendicularlinie und der Winkel AOP = y, so findet Lambert, indem er von a = AP — BP und c = DP — CP ausgeht, in Folge zweier von einander unabhängigen Fehler:

$$\text{tg} \cdot y^2 + \text{tg} \cdot y \left[(\text{cotg} \cdot v + \text{cotg} \cdot w) - \frac{a}{c} \cdot \text{tg} \cdot u \cdot (\text{tg} \cdot w - \text{tg} \cdot v) \right]$$
$$= \frac{a}{c} \cdot (\text{tg} \cdot w - \text{tg} \cdot v) - \text{cotg} \cdot w \cdot \text{cotg} \cdot v.$$

Unter Vermeidung dieser Fehler hätte er gefunden:

$$\text{tg} \cdot y^2 + \text{tg} \cdot y \cdot \left[(\text{cotg} \cdot v + \text{cotg} \cdot w) - \frac{a}{c} \cdot (\text{cotg} \cdot v - \text{cotg} \cdot w) \right]$$
$$= \frac{a}{c} \cdot \text{cotg} \cdot u \cdot (\text{cotg} \cdot v - \text{cotg} \cdot w) - \text{cotg} \cdot v \cdot \text{cotg} \cdot w.$$

Dann fährt er fort: „Woraus man sieht, daß zween Fälle möglich sind, und der wahre aus andern Umständen muß bestimmt werden, wenn man ihn nicht sonst leicht erkennen kann.... Dieser andere Fall ist (hier) derjenige, wo die Linie AD zwo von den Linien AO, BO oder CO, DO auf der andern Seite durchschneidet, wenn sie außerhalb O verlängert werden."

Statt auf diesem richtigen Wege zur Deutung der zweiten Wurzel der Gleichung weiter fortzugehen, findet Meier Hirsch (pag. 83), daß nach Lambert's Formel „schwer zu rechnen" sei, und beachtet bei seiner leichtern Auflösung die negative Wurzel gar nicht.

Eine noch elegantere Auflösung des Problem's hat Dr. Peppe (Ebene Trigonometrie, Frankfurt am Main, 1847, pag. 82) mitgetheilt.

Auflösung (2). Er nennt AOB = α, BOC = β, COD = γ, und findet aus

$$BO : c + x = \text{Sin } D : \text{Sin } (\beta + \gamma)$$
$$CO : a + x = \text{Sin } A : \text{Sin } (\alpha + \beta)$$
$$a : BO = \text{Sin } \alpha : \text{Sin } A$$
$$c : CO = \text{Sin } \gamma : \text{Sin } D, \text{ folgende Gleichung:}$$
$$(x + x) \cdot (c + x) = \frac{a \cdot \text{Sin } (\alpha + \beta)}{\text{Sin } \alpha} \times \frac{c \cdot \text{Sin } (\beta + \gamma)}{\text{Sin } \gamma}$$

Digitized by Google

Setzt man der Kürze wegen $(a + x) \cdot (c + x) = d^2$, so hat man

$$x = + \sqrt{\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + d^2} - \frac{a + c}{2} =, \text{ p und auch}$$

$$x = - \sqrt{\left(\frac{a - c}{2}\right)^2 + d^2} - \frac{a + c}{2} = - (p + a + c).$$

Aber nun erklärt Poppe gerade zu: „wobei jedoch von den beiden vor der Wurzel stehenden Zeichen das negative zu verwerfen ist."

Was wir von dem negativen Werthe zu halten haben, werden wir am besten aus der schönen, antiken Auflösung des Baltrusch (Grunert, Archiv, 16, 245) erfahren, obgleich auch er, wie sich zeigen wird, von der negativen Wurzel nicht den rechten Begriff hatte.

Auflösung (3). Beschreibe über c einen Bogen, der den Winkel γ faßt, mache den Bogen CG, einem Peripheriewinkel β entsprechend, und den Bogen GH, einem Peripheriewinkel α entsprechend; ziehe durch G eine Parallele mit CD, mache GK = a, verlängere sie bis J und beschreibe durch K, H, J einen Kreis, welcher CD in A (und E) trifft. Ziehe von A nach H (und ebenso von E nach H) eine Linie. Dadurch bekommt man den Punkt O (und O'). Hierauf ziehe GOB (so wie GO'F), dann OC und OD (so wie O'C und O'D).

Beweis 1) daß O der richtige Punkt ist.

Da $\delta = HOD = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$, also $AOD = \alpha + \beta + \gamma$ ist, da ferner $COD = \gamma$, $GOH = \alpha = AOB$ ist, so muß $BOC = \beta$ sein. Dann ist KAO = GOH, weil beide gleich GJH = α sind. Also ist AK || GB, folglich AKGB ein Parallelogramm, mithin AB = a.

2) In Betreff von O' sagt Baltrusch:

„Aehnliches gilt von dem Punkte O'. Denn es ist auch $FO'E = \alpha$, $EO'D = \delta$, $DO'C = \gamma$. Auch ist der Abschnitt FE der Linie FC der gegebenen a gleich." Nämlich.... „Aber auch der Punkt O' erfüllt die geforderten Bedingungen. Denn HEK = HO'G = α, also EK || FG und JK || AF, daher EF = GK = a. Und hieraus folgt DE = BC."

Daß ED = BC ist, beweiset Baltrutsch nachträglich in einem besonderen Satze (pag. 247), für unsern Zweck genügt folgendes: Man verlängere die Linien BOG und EO'H, bis sie sich in N treffen, dann hat man nach dem Satze des Menelaus in Bezug auf das Dreieck BEN und die Transversalen GO'F und HOA

$$\frac{NG}{GB} : \frac{NO'}{O'E} = \frac{EF}{FB} : 1$$

$$\frac{NH}{HE} : \frac{NO}{OB} = \frac{BA}{AE} : 1.$$

Da nun schon bewiesen ist, daß EF = a = AB ist, und da folglich auch FB = AE ist, so muß auch sein:

Digitized by Google

$$\frac{NG}{GB} : \frac{NO'}{O'E} = \frac{NH}{HE} : \frac{NO}{OB}.$$ Da ferner

NG : NO′ = NH : NO, ſo haben wir auch

GB : O′E = HE : OB, oder GB . OB = O′E . HE.

Weil nun einerſeits GB . OB = DB . CB iſt, und andererſeits

O′E . HE = DE . CE, ſo ergiebt ſich

DB . CB = DE . CE, oder BC : CE = DE : BD, oder BC : BE = DE : BE.

Demnach iſt in der That BC = DE.

3) Allerdings hat hiemit Baltruſch bewieſen, daß von dem Punkte O′ Aehnliches gilt, wie von dem Punkte O. Dem füge ich, um die Aehnlichkeit noch mehr hervorzuheben, hinzu: ſo gut wie HOA die erſte Geſichtslinie, GOB die zweite, OC die dritte und OD die vierte war, mit demſelben Rechte iſt HO′E die erſte, GO′F die zweite, O′C die dritte, O′D die vierte Geſichtslinie. Auch bei O′ liegt alſo dem von den beiden erſten Sehſtrahlen eingeſchloſſenen Winkel α die Strecke a, dem von den beiden letzten Sehſtrahlen eingeſchloſſenen Winkel γ die Strecke c gegenüber. Was kümmert es uns aber, daß dem von der erſten und vierten Viſirlinie eingeſchloſſenen Winkel δ eine Strecke DE gegenüberliegt, die gleich BC iſt? Sollte der Punkt O′ allen geforderten Bedingungen entſprechen, ſo müßte der von der zweiten und dritten Viſirlinie eingeſchloſſene Winkel = β ſein, während er doch = $180^0 - \beta$ zu ſein ſcheint, und es müßte nun die ihm gegenüberliegende Strecke CF zur Discuſſion kommen und nicht bloß der Theil DE; es hätte müſſen nachgewieſen werden, daß während BC = p iſt, nur CF = — (p + a + c) geſetzt werden kann.

4) Uns wird es nicht ſchwer werden, die beiden noch übrig gebliebenen dunkeln Punkte aufzuklären. Ich nannte vorhin vorläufig O′C den dritten und O′D den vierten Strahl. Dieſer Ausſpruch bedarf einer nochmaligen Erwägung. Soll, während O′E der erſte, O′F der zweite Strahl iſt, eine Linie der dritte ſein, ſo muß ſie auf den zweiten folgen, muß rechtshin, hinter dem zweiten liegen. Wir haben daher, um den dritten Strahl zu erlangen, von O′ aus über L hinaus unſern Weg zu nehmen und erſt dann anzuhalten, wenn wir auf dieſem Wege bis zur Linie AF im Punkte C gekommen ſind. Der dritte Strahl iſt mithin nicht O′C, ſondern ∞ — O′C, ſo wie auch der vierte Strahl über Q hinaus nicht O′D iſt, ſondern ∞ — O′D. Nun iſt der von dem zweiten und dritten Strahl eingeſchloſſene Winkel FO′L als Scheitelwinkel = CO′G, alſo in der That = β, und die ihm gegenüberliegende Strecke geht von F über M nach C, iſt alſo = ∞ — FC, oder wenn man lieber will = — FC = — (a + c + DE) = — (a + c + p), während ſie in Beziehung auf den Punkt O = p war. Endlich iſt der vom dritten und vierten Strahl eingeſchloſſene Winkel QO′L als Scheitelwinkel = CO′D = γ und die ihm auf der Linie AM gegenüberliegende Strecke CD = c.

Der Punkt O′ giebt uns alſo nicht nur Aehnliches wie der Punkt O, ſondern er erfüllt theoretiſch vollkommen alle geforderten Bedingungen eben ſo gut, wie O; auch findet jetzt eine vollkommene Harmonie zwiſchen der geometriſchen und der zweiten trigonometriſchen Löſung ſtatt.

Anmerkung 1. Vielleicht hat es für manchen Leſer ein Intereſſe, an dem von Meier Hirſch (pag. 82) gegebenen Zahlenbeiſpiele: a = 2731, c = 1987; $\alpha = 19^0\,7'$, $\beta = 31^0\,5'$, $\gamma = 14^0\,57'$, wornach x = 3612,225, aber auch x = — 8330,225 iſt, die Richtigkeit der von mir verbeſſerten Lambert'ſchen Gleichung zu prüfen. Man findet durch dieſelbe

$$tg.y = +\,0{,}7181913, \text{ alſo } y = 35^0\,41'\,8'',1$$

und auf $tg.y = -\,1{,}505883$, alſo $y = -\,56^0\,24'\,48'',1$, oder im vierten Quadranten liegend, d. h. fällt man von O' ein Loth O'P' auf CF, ſo iſt der Winkel

$$EO'P' = 56^0\,24'\,48'',1 \text{ während } AOP = 35^0\,41'\,8'',1 \text{ beträgt.}$$

Dieſe Reſultate ſtimmen vollkommen überein mit denjenigen, die ich auf einem ganz andern Wege gefunden habe, wonach

AO = 7992,855	EO' = 2083,715	
BO = 6773,285	FO' = 4613,175	A = 54° 18' 51", 94
CO = 6706,066	— CO' = — 4031,686	E = 146° 24' 48", 12
DO = 7456,447	— DO' = — 2202,170	

Anmerkung 2. Von dieſer Lambert'ſchen Aufgabe kenne ich noch eine ſchöne geometriſchen Conſtruction der aus der zweiten trigonometriſchen Löſung hervorgegangenen Gleichung von Beſſel und eine rein geometriſche Auflöſung vom Oberlehrer Dr. Hoffmann in Königsberg. Es wäre zu wünſchen, daß keine dieſer beiden Löſungen verloren ginge.

§ 42.

Pappus (vor 400 n. Ch.) giebt in ſeinen Sammlungen als die in der verloren gegangenen Schrift des Apollonius Pergäus (um 247 v. Ch.): Περὶ χωρίου ἀποτομῆς in 20 Oertern und 84 Fällen behandelte Aufgabe folgende an: Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν τέμνουσαν ἀπὸ τῶν δοθεισῶν θέσει δύο εὐθειῶν πρὸς τοῖς ἐπ' αὐτῶν δοθεῖσι σημείοις (γραμμὰς) χωρίον περιεχούσας ἴσον τῷ δοθέντι. Aus der Wiederherſtellung der Schrift von Halley (1706) wählen wir nur den dritten Ort des per omnes casus plenissime soluti Problem's, welcher lautet: Intersecent se mutuo rectae duae positione datae, ut KL et MN, in puncto B, ac concipiatur utrumque punctum coalescere in commune punctum occursus B: oportet ducere per punctum datum J rectam AC, quae auferat segmenta AB, CB, rectangulum aequale rectangulo dato comprehendentia. Der größeren Bequemlichkeit wegen aber drücken wir uns folgendermaßen aus:

Fig. 8.

34ſte Aufgabe. Es ſind zwei ſich in B ſchneidende gerade Linien KL und MN und zwiſchen ihnen der Punkt J gegeben. Man ſoll durch dieſen Punkt an ſie eine Gerade AC ſo legen, daß das dadurch abgeſchnittene Dreieck ABC einen gegebenen Inhalt habe.

Halley (und ſicherlich auch Apollonius) erkannte, daß der uns beſchäftigende Locus drei Fälle in ſich ſchließe, je nachdem die geſuchte Linie in dem Winkel KBM oder in LBN oder endlich in dem Winkel KBN zu liegen komme.

In neuerer Zeit hat man aus dieſer Aufgabe zwei gemacht, indem man es beſonders hervorhebt, daß der Punkt J außerhalb oder innerhalb eines gegebenen Winkels liegen ſoll. Wir beſchäftigen uns daher zunächſt mit dem erſtern, leichtern Falle.

Digitized by Google

1ſter Fall. Außerhalb des Winkels KBM iſt ein Punkt J gegeben; man ſoll durch denſelben die Linie JAC ſo ziehen, daß das abgeſchnittene Dreieck ABC eine gegebene Größe habe.

Auflöſung. Wenn man die gegebene Fläche in ein Parallelogramm BEFG verwandelt, deſſen Punkte F und E mit J in gerader Linie liegen, wenn man ferner JE = m, BG = p, BC = x ſetzt, ſo findet man leicht:

$$x = p \pm \sqrt{p \cdot (p + 2m)}.$$

Dr. E. S. Unger (Die Geometrie des Euklid. Erfurt 1833 pag. 586) ſchweigt über das Minuszeichen vor der Wurzelgröße ganz und gar, er kennt nur eine Auflöſung. F. Wolff (Lehrbuch der Geometrie, Berlin 1833 I. pag. 197) verwirft das zweite Zeichen gerade zu, er ſagt: „Die Wurzel darf nur poſitiv genommen werden, weil ſie größer iſt als p, und x nicht negativ ſein kann.“ Dr. H. Gerlach (Lehrbuch der Mathematik, Planimetrie, Deſſau 1853, pag. 126) deutet das negative Zeichen, indem er ſagt: „Die Bedeutung dieſes negativen Ausdrucks iſt die, daß man ſein Gegentheil in entgegengeſetzter Richtung auf BN, alſo das verlangte Dreieck von dem Scheitelwinkel NBL abſchneiden kann.“ Und in ähnlicher Weiſe hatte ſich auch ſchon Klügel (1803, I. pag. 115) mit den Worten geäußert: „Die Algebra giebt mit der Auflöſung für den Fall, da die Linie AC innerhalb des Winkels KBM gelegt wird, auch die Auflöſung für den Fall, da A′C′ innerhalb des Winkels NBL gelegt wird.“ Sollten nun Unger und Wolff gegen Gerlach und Klügel einwenden: Wir haben nur innerhalb des Winkels KBM eine Löſung geſucht, innerhalb des andern Winkels NBL haben wir nichts zu ſuchen, und wo wir nichts zu ſuchen haben, wollen wir auch nichts finden; ſo würde ich auf dieſen Einwand in ſchon bekannter Weiſe erwidern: Die Schenkel des Winkels KBM gehen, der eine von B über M nach N und B, der andere reicht von B über K und L bis B. Wenn x = BC negativ gefunden wird, ſo heißt das eben mit Umgehung des Unendlichen, ich habe das nämliche poſitive Stück in entgegengeſetzter Richtung von B bis C′ aufzutragen;*) und ebenſo giebt das negative Stück BA′ zu erkennen, wie weit auf dem Schenkel BK der Durchſchnitt der geſuchten Linie über B liegt; ich ſehe alſo BC′ und BA′ immer noch als Schenkel des urſprünglichen Winkels KBM und das Dreieck A′BC′ als von dieſen Schenkeln abgeſchnitten an.

Beweis, daß A′BC′ = BEFG = P iſt.

Es iſt $BC' = \sqrt{p \cdot (p + 2m)} - p$, alſo $GC' = \sqrt{p \cdot (p + 2m)}$.

Nun ſei JF = v, alſo $p = v - m$, $p + 2m = v + m$. Mithin iſt $GC' = \sqrt{v^2 - m^2}$.

Weil demnach $JF^2 = GC'^2 + JE^2$, ſo auch

JFH′ = GC′H′ + JEA′. Davon ab A′BGH′ + JEA′, giebt

BEFG = A′BC′.

§ 43.

2ter Fall. Innerhalb des Winkels KBN iſt der Punkt J gegeben; man ſoll durch denſelben die Linie AC ſo ziehen, daß das abgeſchnittene Dreieck ABC einen gegebenen Raum enthalte.

*) In der Figur iſt der Punkt C′ abſichtlich ein wenig näher an B gelegt, als es ſein ſollte, um noch den Schnittpunkt H′ darſtellen zu können.

Digitized by Google

Fig. 8 α. 1ſte Annahme. Grenze: JE = JF.

Das kleinſte Dreieck ſchneidet man auf dieſe Weiſe ab, indem man JE ∥ BN legt, EA = EB macht und AJC zieht. Denn man wird durch die Hilfslinie SAT, welche BN parallel gezogen iſt, leicht beweiſen können, daß ſowohl durch die Linie RJN, als durch die Linie KJO ein größeres Dreieck abgeſchnitten wird als ABC. Macht man nun FJ = EJ und zieht FC, ſo iſt das Parallelogramm BEFC dieſem kleinſten Dreieck gleich. Daher darf der gegebene Raum nicht kleiner als dieſes Parallelogramm ſein, wenn es möglich ſein ſoll, die Aufgabe praktiſch zu löſen, d. h. der gegebene Punkt J darf nicht dem Punkte F näher liegen als dem Punkte E.

Fig. 8 β. 2te Annahme. Es ſei daher JE < JF.

Alle Schriftſteller, die dieſe Aufgabe behandelten, haben erkannt, daß unter der gemachten Vorausſetzung zwei Auflöſungen möglich ſind. Denn warum ſollte nicht ebenſo gut, wie die Dreiecke AEJ (= D) und GCH (= δ) zuſammen gleich dem Dreieck JFH (= d) ſein können, auch das Dreieck A′EJ (= D′) dem Trapez JFGC′ = JFH′ — GC′H′ (= d′ — δ′) gleich zu machen ſein? Es dürfte ja nur C′G = CG gemacht werden. Nachdem man alſo ein rechtwinkliges Dreieck gemacht hat, deſſen Hypotenuſe JF = n und deſſen Kathete JE = m iſt, trägt man die andere Kathete $\xi = \pm \sqrt{n^2 - m^2}$ auf BN von G aus nach beiden Seiten bis C und C′ auf, und zieht durch J ſowohl die Linie AC, als auch die Linie A′C′, ſo genügen beide Dreiecke ABC (= Δ) und A′BC′ (= Δ′) den Anforderungen, indem ſich leicht zeigen läßt, daß jedes dieſer Dreiecke dem gegebenen Parallelogramm BEFG (= P) an Fläche gleichkommt. Diejenigen, welche die Aufgabe möglichſt rein arithmetiſch löſten, haben, wenn ſie wieder BG = p und BC = x ſetzten, gefunden:

$$x = p \pm \sqrt{p.(p - 2m)}.$$

Natürlich; denn n + m = p, n — m = p — 2 m und x = p ± ξ.

Keiner vergißt bei dieſer Gelegenheit zu bemerken, daß die Löſung der Aufgabe unmöglich wird, wenn $m > \frac{p}{2}$ iſt. Aber ſelbſt Dieſterweg, A. Richter in Elbing und Paucker, welche das Problem De sectione spatii in beſondern Schriften 1827, 1828, 1837 behandelt haben, warfen nicht einmal die Frage auf, wie der unter dieſer Vorausſetzung imaginär werdende Ausdruck für x zu deuten ſei. Ich kann mich aber dabei nicht beruhigen, daß, während die beiden arithmetiſchen Antworten, welche ſich auf die Annahme, wonach J näher an E liegt, beziehen, gleiche Berechtigung und Anerkennung in der Geometrie gefunden haben, die zwei eben ſo beſtimmt ausgeſprochenen arithmetiſchen Antworten, welche auf der andern Seite der Grenze hervortreten, wenn J nämlich näher an F liegt, gar nichts bedeuten und in gar keiner Beziehung zur geometriſchen Aufgabe ſtehen ſollen. Daher gehe ich weiter.

§ 44.

Fig. 8 γ. 3te Annahme. JE > JF.

Allerdings kann nun weder ein Dreieck wie ABC = Δ, noch ein Dreieck wie A′BC′ = Δ′ dem Parallelogramm BEFG = P gleich ſein; es müßte ja dann wegen der Aehnlichkeit gewiſſer

Digitized by Google

Dreiecke zu $JE^2 = m^2$ noch etwas Unbekanntes GC^2 oder $GC'^2 = \xi^2$ addirt werden können, um $JF^2 = n^2$ zu erhalten. Da jedoch gegenwärtig $m > n$ ist, so ist solches auf dem Gebiete des Positiven nicht möglich. Aber wenn das Unbekannte negativ wäre, so würde, meine ich, kein Hinderniß sein, um zum Ziele zu gelangen. Inzwischen heißt das negative Unbekannte addiren doch nach allgemein zugestandenem Sprachgebrauch nichts anderes, als das nämliche positive Unbekannte subtrahiren. So sagt ja unter andern schon Klügel (I. pag. 110): „Die Algebra begreift Addiren und Subtrahiren in eine Rechnung, daher ihre mehrfache Antwort auf eine Frage." Sind wir aber gezwungen, jetzt $m^2 - \xi^2 = n^2$ zu setzen, so heißt das, es soll $\left\{\begin{matrix} JFH + GCH = JEA \\ d + \delta = D \end{matrix}\right\}$ oder $\left\{\begin{matrix} JFH' + GC'H' = JEA' \\ d' + \delta = D' \end{matrix}\right\}$ sein; was darauf zurückzuführen ist, daß jetzt das durch die gesuchte Linie AC oder A'C' abzuschneidende Dreieck ABC oder AB'C' das gegebene Parallelogramm BEFG um das Doppelte eines Dreiecks übertreffen soll, dessen Seiten die unbekannte Linie (GC oder GC'), die gesuchte Linie und die gegebene Linie FG sind; weil, wenn man die ergänzenden Trapeze BEJC und BEJC' mit T und T' bezeichnet, sowohl $T = P - d + \delta$, als auch $T' = P - d' + \delta'$ ist. Kurz, es soll jetzt $\Delta = P + 2\,\delta$, oder $\Delta' = P + 2\,\delta'$ sein.

Die ganze Aufgabe, die in unserm zweiten Falle enthalten ist, lautet also eigentlich folgender Maßen: In einen Winkel ist ein Parallelogramm (P) gezeichnet, man soll durch den Punkt J eine Linie AC ziehen, dergestalt, daß $D \pm \delta = d$ werde. Sie zerfällt demnach in zwei Aufgaben:

1) $D + \delta = d$, d. h. $\Delta = P$,
2) $D - \delta = d$, d. h. $\Delta = P + 2\,\delta$.

Giebt man uns die erste Aufgabe, so wird stillschweigend vorausgesetzt, daß J näher an E als an F liegt, daß $m < n$ ist. Wer die zweite Aufgabe stellt, denkt sich umgekehrt $n < m$. Sollte doch wider Erwarten bei der ersten Aufgabe $m > n$ sein, so dürfen wir uns nicht wundern, wenn wir bei dem arithmetischen Ausdruck für x oder ξ auf Unmögliches stoßen, das will eben nur sagen, daß wir dadurch in die zweite Aufgabe hinübergreifen. Ebenso ergeht's dem, der während der Beschäftigung mit der zweiten Aufgabe annimmt, daß $n > m$ ist; auch er stößt dann auf einen imaginären Ausdruck, der ihn belehrt, daß er ja in die erste Aufgabe hinüberschweife.

§ 45.

Während wir in § 43 uns mit der ersten specificirten Aufgabe $\Delta = P$ beschäftigt haben, wollen wir jetzt die andre behandeln: $\Delta = P + 2\,\delta$, welche auf die im vorigen Paragraphen gemachte dritte Annahme hinausläuft, daß $JE > JF$ ist. Nun wird man auf nichts imaginäres stoßen; man wird finden, daß $\xi = \pm \sqrt{m^2 - n^2}$ und

$$x = p \pm \sqrt{p \cdot (2\,m - p)}$$ ist.

Es kann aber JE unter ganz verschiedenen Nebenumständen größer als JF sein, die ich noch angeben und wo es mir nöthig scheint, mit Erläuterungen begleiten will.

Erste Nebenbedingung. $GC < JF$. Fig. 8 γ.

Das Dreieck GC'H' muß hier als positiv betrachtet werden, weil sowohl seine Grundlinie, wie auch seine Höhe eine entgegengesetzte Lage zu Grundlinie und Höhe des Dreiecks GCH haben.

Fig. 8 δ. Zweite Nebenbedingung. $GC = JF$.

Macht man hiebei $GC' = GC$ und verlängert JC' nach beiden Seiten, so wird man finden, daß die parallelen Linien BE und FG von ihr nicht getroffen werden, oder daß die Schnittpunkte A′ und H′ in eine unendliche Ferne gerückt sind. Man kann daher sagen, daß sowohl Δ' unendlich ($= U'$), als auch δ' unendlich ($= u'$) ist und es kann $\Delta' = P + 2.\delta'$ sein.

Fig. 8 ε. Dritte Nebenbedingung. $GC > JF$.

Es ist $JEA' = JFH' + GC'H'$.

Davon ab: $BEJC' = P - GC'H' + JFH'$.

Also $A'BC' = -P + 2.GC'H'$, oder $-A'BC' = P - 2.GC'H'$.

Nun verstanden wir in § 44 unter Δ' den abgeschnittenen Flächenraum über BC′ rechts von BE, da aber in unsrer jetzigen Figur das abgeschnittene Dreieck A′BC′ unter BC′ rechts von BE liegt, so ist $\Delta' = -A'BC'$. Ebenso verstanden wir in § 44 unter δ' einen gewissen Flächenraum unter GC′ links von FG; weil jetzt aber GC′H′ über GC′ links von FG liegt, so ist $\delta' = -GC'H'$. Daher ist auch hier, wie es sein soll: $\Delta' = P + 2.\delta'$.

Fig. 8 ζ. Vierte Nebenbedingung. $GC = JE = m = p$, und $JF = n = o$.

Da $\Delta' = A'BC' = o$, $\delta' = -C'GF$ und $P = 2.C'GF$ ist, so haben wir wieder: $\Delta' = P + 2.\delta'$.

Fig. 8 η. Fünfte Nebenbedingung. Der Punkt J, der früher zwischen E und F lag, ist dem Punkte F immer näher gerückt und liegt jetzt außerhalb EF, rechts von F, so daß, nachdem der Werth von n, d. h. die Entfernung des Punktes J von F (links von F) schon bis auf Null herabgesunken war, von nun an n negativ $= -\nu$ ist. Demnach ist der absolute Werth von $JF = \nu$ und $m = EJ = EF + FJ = p + \nu$.

Es sei hiebei $GC > \nu$. Weil immer $EJ^2 = JF^2 + GC^2$ ist, so haben wir, wenn wir $A'EFH' = V'$ und $A'BGH' = v'$ setzen,

einerseits:

$EJA = JFH + GCH$

Dazu $BEJC = P + GCH - JFH$

$\Delta = P + 2.\delta$.

andererseits:

$BEJC'$ d. h. $EJA' - A'BC' = V' + JFH' - (C'GH' - v')$

ab $EJA' = JFH' + C'GH'$

$-A'BC' = P - 2.C'GH'$.

Da wir nun auf der einen Seite unter Δ und δ die Räume über BC verstehen, welche rechts von den parallelen Linien BE und FG liegen, so müssen wir auch auf der andern Seite unter Δ' und δ' Räume über BC verstehen, welche rechts von den genannten Linien liegen; aber A′BC′ und C′GH′ liegen links von denselben, also ist $\Delta' = -A'BC'$ und $\delta' = -C'GH'$, daher haben wir auch auf der andern Seite wieder $\Delta' = P + 2.\delta'$.

Bemerkung. $A'BC' = V' - v'$.

Fig. 8 ϑ. Sechste Nebenbedingung. Während n negativ $= -\nu$ bleibt, wird $GC = \nu$.

Da hiebei Δ unendlich $= U$ und δ unendlich $= u$ ist, so mag auch hier $\Delta = P + 2.\delta$ sein. Keine Schwierigkeit macht dagegen ein negatives ξ. Wir setzen dabei, absolut genommen, wie immer, $GC' = GC$. Dann haben wir wieder:

$$\begin{array}{rcl} EJA' - A'BC' = V' + JFH' - C'GH' + v' \\ EJA' \quad = \quad JFH' + C'GH' \\ \hline -A'BC' = P - 2.C'GH' \\ \Delta' = P + 2.\delta' \end{array}$$

Bemerkung. Auch hier ist $A'BC' = V' - v'$.

Siebente Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, wird GC $<$ ν. Fig. 8 ι.

1) ξ ist positiv.

$$\begin{array}{rcl} EJA = \quad FJH + GCH \\ BEJC = P + FJH - GCH \\ \hline -ABC = P - \quad 2.GCH. \end{array}$$

Nun aber verstehen wir unter Δ und δ rechts von den Parallelen BE und FG gelegene Dreiecke, deren Spitzen A und H oberhalb der Grundlinien BC und GC liegen; weil aber in unserer jetzigen Figur die Spitzen der Dreiecke ABC und GCH unterhalb dieser Grundlinien liegen, so ist: $\Delta = P + 2.\delta$.

2) ξ ist negativ. Dies giebt wieder: $-A'BC' = P - 2.GC'H'$.

Obgleich A'BC' und GC'H' hier, wie Δ und δ in § 44 Fig. γ, oberhalb der Grundlinien liegen, so müssen sie dennoch als negativ betrachtet werden, weil ihre Grundlinien das Zeichen verändert haben. Während dort nämlich die Grundlinien rechts von den Parallelen BE und FG lagen, liegen sie hier (BC' und GC') links von denselben Parallelen. Daher ist auch hier $\Delta' = P + 2.\delta'$.

Bemerkung. $A'BC' = V' - v'$.

Achte Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, ist GC $=$ o $=$ GC' geworden. Fig. 8 κ.
Es ist demnach $m = \nu$ und $\xi = \pm\sqrt{m^2 - n^2} = \pm o$.

Da hier $ABC = o = A'BC'$, $p = o$, $GCH = o = GC'H'$, so ist sowohl $\Delta = P + 2\,\delta$, als auch $\Delta' = P + 2\,\delta'$.

Bemerkung. Man kann einerseits wieder sagen: $A'BC' = V' - v'$, andererseits mit Hinblick auf die folgende letzte Nebenbedingung, indem man AEFH $= V$ und ABGH $= v$ setzt, es sei $\Delta = V + v = P$ und $\Delta' = V' - v' = P$.

Neunte Nebenbedingung. Während n negativ bleibt, wird auch GC negativ, d. h. Fig. 8 λ.
die Linie FG, welche bisher rechts von der Parallelen BE lag, kommt jetzt links von derselben zu liegen.

Ursprünglich (§ 43) waren JE und JF positiv und dabei JE $<$ JF; sobald JE $>$ JF wurde (§ 44), fing das Imaginäre an hervorzutreten, und wir schrieben statt $\xi = \sqrt{n^2 - m^2}$ lieber in § 45 $\xi = \sqrt{m^2 - n^2}$. Nun ist (von § 45, 5 ab) JF negativ, also immer noch JE $>$ JF; weil aber jetzt (§ 45, 9) absolut genommen JF $>$ JE, so wird der corrigirte Ausdruck $\sqrt{m^2 - n^2}$ wieder imaginär und bedarf einer neuen Correction. Man wird nämlich nicht mehr sagen können: $JE^2 = JF^2 + GC^2$, sondern wie zu Anfang setzen müssen: $JF^2 = JE^2 + GC^2$; dann ist wieder $\xi = \pm\sqrt{n^2 - m^2} = \pm\sqrt{\nu^2 - m^2}$.

Digitized by Google

1) ξ ist positiv. $EJA = FJH - GCH$

$$\underline{-ABC + EJA = -GCH - v + FJH - V}$$
$$-ABC = -(V + v) = -P$$
$$\Delta = P.$$

2) ξ ist negativ. $EJA' = FJH' - GC'H'$

$$\underline{BEJC = -A'BC' + EJA' = -GC'H' + v' + FJH' - V'}$$
$$-A'BC' = -(V' - v') = -P$$
$$\Delta' = P.$$

Da bekanntlich nur erst wenige Schriftsteller das Prinzip der Zeichen auch auf Flächen angewandt haben, so schien es mir zweckmäßig, bei der Auseinandersetzung meiner Gründe, warum ich bei dem vorliegenden Raumschnitt diese Fläche für positiv, jene für negativ erklärte, nicht zu wortkarg zu sein. Es gereicht mir übrigens zur Befriedigung, daß meine desfallsigen Resultate vollkommen mit der Regel übereinstimmen, welche Möbius in seinem barycentrischen Calcul (1827 pag. 20) aufgestellt hat. Darnach ist nämlich eine Fläche als negativ zu betrachten, wenn die in ihren Eckpunkten zur Bezeichnung befindlichen Buchstaben in entgegengesetztem Sinne gelesen werden müssen, als die entsprechenden Buchstaben in der Hauptfigur. Man wähle z. B. aus Figur 8 *e* die Dreiecke $\delta = CGH$ und $\delta' = C'GH'$. Bei dem ersten Dreiecke, dessen Fläche wir als positiv betrachten wollen, hat das Auge Behufs der angegebenen Benennung eine Bewegung von rechts nach links herum zu machen; da es nun bei einer analogen Benennung des entsprechenden andern Dreiecks δ' eine Bewegung von links nach rechts herum machen muß, so hat man die Fläche δ' nach Möbius als negativ aufzufassen.

So haben wir denn die Wanderung aus dem Reellen ins Imaginäre und aus dem Imaginären ins Reelle vollendet, sind aber dabei schließlich aus dem zweiten Falle in den ersten Fall, bei welchem J außerhalb der Schenkel eines Winkels lag, gekommen. Wir sehen also, daß bei dem vorliegenden Problem weder die Scheitelwinkel noch die Nebenwinkel einen wesentlichen theoretischen Unterschied begründen. Demnach ist die ältere Auffassung der Aufgabe der spätern Zweitheilung derselben vorzuziehen, und bedarf nur der von uns gegebenen Ergänzung wegen des Imaginären.

Ich könnte noch über Chasles' Auflösung des Problem's vom Raumschnitt vermittelst der Doppelpunkte zweier homographischer Theilungen (Traité de Géométrie supérieuse, 1852, pag. 218) sprechen. Da es aber in dem Wesen der Methode dieses Meisters der neuern Geometrie liegt, das Imaginäre, so zu sagen, zu umgehen, que les objets susceptibles de devenir imaginaires, n'y entrent pas sous forme explicite, mais s'y trouvent représentés par des éléments réels, pag. XVI., so verspare ich mir ein weiteres Eingehen auf seine Auflösung für eine spätere Gelegenheit und führe zur Beruhigung derer, welche meinen könnten, daß meine Auflösungen für die Fälle, daß die Formeln imaginär werden, die eigentlichen Aufgaben zu sehr ändern, aus seinem Werke pag. XVI. noch die Worte an: Il peut arriver, quand quelques parties d'une figure deviennent imaginaires, que les propositions soient susceptibles de nouveaux énoncés très-différents des premiers, et donnent lieu à des propriétés de l'étendue très-différentes aussi de celles que l'on considérait d'abord.

Digitized by Google

§ 46.

35ſte Aufgabe. Newton in ſeiner Arithmetica universalis (pag. 118 Probl. 24) beſchäftigt ſich mit folgender Aufgabe: Angulum rectum (CAB) data recta (BC) subtendere, quae transibit per datum punctum (D), a lineis rectum angulum comprehendentibus aequidistans.

Durch geſchickte Wahl der unbekannten Größe kommt er auf eine biquadratiſche Gleichung, in welcher die ungeraden Potenzen fehlen, ſo daß es nur zwei an Quantität verſchiedene Auflöſungen giebt, aber jede derſelben kann poſitiv oder negativ ſein. Er ſelbſt kümmert ſich bei dieſer Aufgabe um die verſchiedene Qualität der Reſultate gar nicht. Doch ſehen wir nach, was ſpätere Schriftſteller aus derſelben bei dieſer Gelegenheit gemacht haben.

Bézout (Cours de Mathématiques, III. 330) nennt den Abſtand der Schenkel des rechten Winkels von D = a, BC = c. Für den Fall, daß BC nicht mit D in dem nämlichen Quadranten liegt, nennt er die halbe Summe der unbekannten Linien DB und DC = x, für den andern Fall aber, daß D mit BC in demſelben Quadranten liegt, bezeichnet er die halbe Differenz der Linien DB und DC mit x. In beiden Fällen kommt er auf die nämliche Gleichung Fig. 9 α. Fig. 9 β.

$$x^4 - \left(\tfrac{1}{2}\,cc + 2aa\right) x^2 = \tfrac{1}{2}\,aacc - \tfrac{1}{16}\,c^4, \text{ wo}$$

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\,cc + aa \pm \sqrt{aacc + a^4}} \text{ iſt.}$$

Von den hierin ſteckenden vier Werthen bezieht er auf die erſte Figur (α) den Ausdruck

$$x = + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,cc + aa + a\sqrt{cc + aa}}$$

und auf die zweite Figur (β) den Ausdruck

$$x = + \sqrt{\tfrac{1}{4}\,cc + aa - a\sqrt{cc + aa}},$$

welcher vorausſetzt, daß $c^2 > 8a^2$ ſei.

Auch iſt er wegen der beiden andern negativen Werthe nicht in Verlegenheit. Er ſagt (ähnlich wie bei der in § 36 behandelten Aufgabe): Les deux autres racines, étant toutes négatives, ne peuvent appartenir qu' à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.... Pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins, dans l'équation, si le point D est, (comme on l'a supposé d'abord) au-dessous de AJ et à gauche de AE, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première et à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de A'J' et de A'E'.... Et l'on voit en effet que dans cette nouvelle position les points B et C tombent de côtés opposés à ceux où ils tombaient d'abord, et que par conséquent la somme, ainsi que la différence des deux lignes DB' et DC' doit être négative, comme l'équation les donne en effet.

Dieſe Löſung kann uns aber nicht befriedigen, weil offenbar das zweite Syſtem von ſenkrechten Linien A'B' und A'C' ein ganz fremdartiges iſt, nur hingeſtellt, um äußerlich einen Gegenſatz hervorzubringen; der Punkt D hat mit letzterem Syſtem nichts zu ſchaffen.

Auch erkennt ſchon Lacroix in ſeinem Traité de Trigonométrie et d'application de l'Algèbre à la Géométrie Bézout's Darſtellung der negativen Wurzeln nicht als richtig an, er tadelt ſeine Analyſis als unvollſtändig und fehlerhaft. Lacroix erhält die negativen Wurzeln dadurch, daß er in Fig. 9 α die Linie DCB in den entgegengeſetzten Quadranten hineinzieht, Fig. 9 γ. und in Fig. 9 β dadurch, daß er ſie zwar in den nämlichen Quadranten zieht, doch ſo, daß die Kathete AB kürzer und dafür AC länger werde, wie ſolches aus Fig. 9 γ zu erſehen iſt. Noch deutlicher ſpricht ſich in dieſem Sinne ſein Ueberſetzer Ideler 1822 pag. 124 aus, indem er ſagt (Fig. 6 γ): „Es findet ſich

$$DL = + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 + a\sqrt{cc + aa}} = + W;\ DL' = - W,$$

$$DL'' = + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + a^2 - a\sqrt{cc + aa}} = + w;\ DL''' = - w.$$

Die verſchiedenen Zeichen vor dem erſten Radical geben zu erkennen, ob der (jedesmalige) Punkt L von D aus nach dem Schenkel AB″ oder nach dem Schenkel AC″ des Winkels B″AC″ hinliegt."

In ähnlicher Weiſe äußert ſich Meier Hirſch in ſeiner Sammlung geometriſcher Aufgaben 1805 (I. 136): „Die Linien DL und DL′ ſind in Anſehung ihrer abſoluten Größe einander gleich, und bloß der Lage nach verſchieden, dieſe ſind durch die beiden Werthe ± W gegeben; ebenſo ſind die Linien DL″ und DL‴ bloß in Anſehung der Lage verſchieden und durch die beiden Werthe ± w gegeben.

§ 47.

Doch ſind Lacroix und ſeine Nachfolger den Beweis für ihre Behauptung ſchuldig geblieben, der wohl um ſo nöthiger ſein möchte, weil die Linien DL und DL′ einerſeits und die Linien DL″ und DL‴ andererſeits zwar eine verſchiedene, aber nicht entgegengeſetzte Lage haben. Indem wir den Beweis nachfolgen laſſen, wird ſich zugleich ergeben, daß namentlich Ideler ſich doch in dem Zeichen der beiden letztgenannten Linien vergriffen hat; es iſt nämlich DL‴ poſitiv und DL″ negativ. Um dies aber deutlich zu erkennen, müſſen wir vorläufig den Punkt D ſo annehmen, daß er von den beiden gegebenen Senkrechten AB und AC eine *verſchiedene* Entfernung hat.

Es ſei daher wie bisher DE = a, aber DJ = b. Auch werde vorerſt angenommen, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > a^2 + b^2$ iſt. Dann iſt

Fig. 9 δ. 1) in Bezug auf das Dreieck ABC, wobei DL = x iſt:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right) : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2} : a, \text{ woraus folgt}$$

$$\text{I. } x^4 - \left(a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}\right) x^2 + c\,.\,(b^2 - a^2)\,x + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] = 0.$$

Digitized by Google

2) In Bezug auf das Dreieck AB‴C‴, wobei DL‴ = x ist, erhält man

$$\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2} : a,$$

woraus genau die nämliche Gleichung I. sich ergiebt.

3) Aber in Bezug auf das Dreieck AB′C′, wobei DL′ = x ist, hat man

$$\left(x + \frac{c}{2}\right) : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2} : b, \text{ woraus folgt}$$

$$\text{II. } x^4 - \left(a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}\right) x^2 - c \cdot (b^2 - a^2)\, x + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] = 0.$$

4) Ganz dieselbe Gleichung II. folgt auch in Bezug auf das Dreieck AB″C″, wobei DL″ = x ist, aus der Proportion: $\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2} : b^2$.

Da nun die eine der beiden Gleichungen in die andere übergeht, wenn man darin — x statt x setzt, und jede Gleichung zwei positive und zwei negative Wurzeln hat, vorausgesetzt nämlich, daß keine imaginären Wurzeln vorhanden sind, so ist klar, daß man bei Auflösung der Gleichung I. als positive Werthe von x die beiden Linien DL und DL‴ und als negative Werthe von x die beiden Linien DL′ und DL″ erhalten muß: wer dagegen die Gleichung II. auflösen wollte, müßte natürlich das Gegentheil finden. In beiden Fällen würde man übrigens, da der Coefficient von $x^3 = 0$ ist, finden, daß absolut genommen DL + DL‴ = DL′ + DL″ ist.

Das Vorzeichen dieser vier Linien bestimmt sich also danach, ob die Linie, welche von D nach dem jedesmaligen L gezogen wird, bei ihrer Verlängerung zunächst den *ersten* Schenkel AB oder den zweiten *Schenkel* AC des gegebenen rechten Winkels BAC trifft.

Aber, wird man sagen, so gehören denn doch nicht alle vier Auflösungen *einer* Aufgabe, sondern *zwei* verschiedenen Aufgaben an. Unsre Aufgabe war, so genau wie möglich präcisirt, folgende:

„Es sind zwei auf einander senkrecht stehende Linien AB und AC und ein Punkt D gegeben; man soll aus demselben eine Linie so ziehen, daß das zwischen die Schenkel fallende Stück BC = c werde; wie weit ist D von der Mitte L der dadurch entstandenen Schnittpunkte C und B entfernt, vorausgesetzt, daß die Verlängerung von DL zunächst den *ersten* Schenkel AB treffen soll?" worauf doch nur die beiden Antworten DL und DL‴ zu passen scheinen, während die beiden andern Antworten DL′ und DL″ eine ganz andere Frage voraussetzen, welche mit der unsrigen eigentlich nichts zu thun zu haben scheint; die herrschende Ansicht, wonach die Aufgabe nicht für alles, was in der abgeleiteten Gleichung steckt, verantwortlich gemacht werden könne, indem dieselbe Gleichung ja auch wohl andern Aufgaben entsprechen könne, indem die Gleichung zwar eine Folge der Aufgabe, aber nicht die Aufgabe eine Folge der Gleichung sei, behielte denn doch wohl die Oberhand. —

Der Leser ist längst in den Stand gesetzt, diese Streitfrage selbst zu entscheiden. Sollen nämlich die beiden andern Auflösungen DL′ und DL″ Bezug auf unsere eigentliche Aufgabe

Digitized by Google

haben, so müssen auch sie bei gehöriger Verlängerung zunächst den ersten Schenkel treffen, und dies erreicht man bekanntlich auf folgende Art: Was DL′ anbelangt, so gehe man von D aus über G hinaus immer fort, bis man über C′ nach L′ ankommt; bei weiterer Verlängerung dieser Linie kommt man dann in B′ bei dem ersten Schenkel an; der eben durchlaufene Weg von D bis L′ ist dann aber $= \infty - DL'$, oder $= -DL'$. Was DL″ anbetrifft, so gehe man von D aus über B″ und H hinaus, bis man über C″ nach L″ gelangt; indem man diesen Weg noch weiter über D hinaus verfolgt, kommt man in B″ zuerst an den ersten Schenkel AB an; wird nun gefragt, wie weit der Weg war, den man von D aus in Gedanken zu durchlaufen hatte, bis man zur Mitte L″ der Linie $B''C'' = c$ kam, so ist die Antwort: $\infty - DL''$, wofür man $-DL''$ zu sagen pflegt.

Demnach gehören alle vier Auflösungen zu unsrer einen bestimmt ausgedrückten Aufgabe, es durfte keine fehlen oder auch nur mit einem andern Zeichen behaftet erscheinen; nichts hat sich hiebei als fremdartig oder überflüßig oder unsicher gezeigt; die Gleichung ist ein genauer Abdruck der durch die Aufgabe aufgeworfenen Frage; Aufgabe und Gleichung fragen ganz dasselbe, daher konnten die Antworten der einen zugleich sämmtlich Antworten für die andre sein. Daß auch ganz andre, selbst rein arithmetische Aufgaben*) auf dieselbe Gleichung führen können, beeinträchtigt das eben Ausgesprochene in keiner Weise; immer müssen unsre vier Linien DL, DL′, DL″ und DL‴, mit gehöriger Berücksichtigung ihrer Quantität und Qualität, zugleich die Antwort für jene andren Aufgaben enthalten.

In der vorigen Figur (9 δ) wurde, wie bemerkt, angenommen, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 > a^2 + b^2$

Fig. 9 ε. sei. Daher eben waren dort zwei Wurzeln positiv, zwei negativ. Wenn aber, wie in Fig. (9 ε), $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < a^2 + b^2$ ist, dann ist nur eine Wurzel negativ. Und wirklich führt dann von unsern vier Dreiecken nur das Dreieck AB′C′ auf die Gleichung II.; es ist dann absolut genommen $DL + DL'' + DL''' = DL'$.

Sollte endlich $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$ sein, welcher Fall eintreten würde, wenn D etwa mit L″ zusammen fiele, dann wäre eine Wurzel $DL'' = o$ und die beiden andern positiven Wurzeln wären, absolut genommen, der einen negativen gleich: $DL + DL''' = DL'$.

Ich habe wohl nicht nöthig, nun noch auf den Fall, von welchem wir ausgingen, wo nämlich $a = b$ ist, wieder zurückzukommen, ich kann das füglich dem Leser überlassen.

---

*) Zum Beispiel: Es sind drei Zahlen a, b, c gegeben; man sucht vier andere Zahlen p, q, r, s, von der Beschaffenheit, daß

$$p + q + r + s = o,$$
$$pq + pr + ps + qr + qs + rs = a^2 + b^2 + \frac{c^2}{2}$$
$$pqr + pqs + prs + qrs = c \cdot (a^2 - b^2),$$
$$p \cdot q \cdot r \cdot s = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2 - b^2\right] \text{ sei.}$$

§ 48.

Statt deſſen will ich in der Vorausſetzung, daß wieder a = b iſt, für unſre Aufgabe den Weg zu einer rein geometriſchen Löſung bahnen, die ſich hoffentlich vortheilhaft von bloßen geometriſchen Conſtruetionen arithmetiſcher Ausdrücke unterſcheiden wird, wie ſolche u. a. Bézout (pag. 331) und Meyer Hirſch (pag. 137) gegeben haben.

Arithmetiſche Analyſis. Es ſei DL = x, ſo iſt:

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 : \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 - a^2 : a^2, \qquad \text{Fig. 9 } \alpha.$$

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 : \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 : a^2, \text{ oder wenn man}$$

$$\left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = \xi^2 \text{ ſetzt, } \xi : \left(x - \frac{c}{2}\right) = \left(x + \frac{c}{2}\right) : a.$$

Nun aber verhält ſich in jedem rechtwinkligen Dreiecke MO : MN = NO : NP. Fig. 9 ζ.

Es hindert aber nichts, NP = a, MN = $x - \frac{c}{2}$, NO = $x + \frac{c}{2}$ anzunehmen, wo dann MO = ξ wird. Mithin kommt unſre Aufgabe darauf zurück: Ein rechtwinkliges Dreieck zu machen, in welchem der Unterſchied der Katheten = c und das Loth auf die Hypotenuſe = a gegeben ſind. Die halbe Summe der auf dieſe Weiſe gefundenen Katheten iſt dann das geſuchte x = DL.

2) Fig. 9 β. Es ſei auch hier DL = x, ſo iſt: Fig. 9 β.

$$\left(\frac{c}{2} + x\right) : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \sqrt{\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 - a^2} : a, \text{ oder wenn man}$$

$$\left(\frac{c}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 = \xi^2 \text{ ſetzt, } \xi : \left(\frac{c}{2} - x\right) = \left(\frac{c}{2} + x\right) : a.$$

So kommen wir denn auf folgende Aufgabe: Ein Dreieck MNO zu machen, in welchem die Höhe NP = a, der Winkel an der Spitze N = 90°, und die Summe der beiden Katheten = c iſt. Das geſuchte x iſt dann der halbe Unterſchied der eben gefundenen Katheten. Fig. 9 η.

Wollte man aber eine von dieſen beiden Dreiecksaufgaben arithmetiſch löſen, ſo würde man immer zugleich die andere mitauflöſen, indem man jedesmal auf die nämliche uns ſchon bekannte biquadratiſche Gleichung

$$x^4 - \left(\frac{c^2}{2} + 2a^2\right) x^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[2a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] \text{ geführt wird.}$$

Man kann alſo auf arithmetiſchem Wege die beiden Aufgaben vom rechtwinkligen Dreiecke eben ſo wenig auseinander halten, wie die verſchiedenen Quadranten bei unſerm Newtonſchen Problem, ſie fließen in einander über. Das kann nur daher kommen, weil die Summe zweier Seiten auch die Differenz derſelben vorſtellen kann, indem ich ja die kleinere Seite MN mir als negativ denken kann (= ∞ — MN) und die Differenz der Seiten dann eigentlich ihre Summe iſt.

Digitized by Google

Geometrische Analysis.

Fig. 9 ϑ. 1) Man ziehe durch D eine Linie QR senkrecht auf BC, so folgt aus der leicht zu erweisenden Congruenz der Dreiecke QDJ und BDE, daß QD = DB, und aus der Congruenz der Dreiecke DER und DJC, daß DR = DC ist. Demnach ist die Aufgabe darauf zurückgeführt: Ein rechtwinkliges Dreieck CDQ oder BDR zu zeichnen, in welchem die Höhe = a und die Differenz der Katheten = c gegeben ist.

Fig. 9 ι. 2) Auch hier ziehe man QD ⊥ CB, so ist DJQ ≅ DEB und DER ≅ DJC, also einerseits DQ = DB, anderseits DR = DC. Demnach haben wir wieder nur das rechtwinklige Dreieck CDQ oder BDR zu zeichnen, in welchem außer der Höhe = a die Summe der Katheten = c gegeben ist.

Die Construction dieser beiden Dreiecksaufgaben übergehe ich und verweise den Leser auf die vortrefflichen Lösungen des Directors an der Petrischule in Danzig F. Strehlke (Aufgaben über das gradelinigte Dreieck, Königsberg 1826, pag. 48 und 52). Man kommt hiebei nur durch Anwendung des Kreises und der geraden Linie, wenn man übrigens gewisse von demselben absichtlich übergangene zweite Schnittpunkte gleichfalls berücksichtigt, in beiden Fällen auf zwei congruente Dreiecke FGS und FGS′, wie sie in Fig. 9 ϰ und in Fig. 9 λ vorliegen. Ihre Seiten GS und FS sind dann die Linien DC und DB in Fig. 9 ϑ und Fig. 9 ι.

Solche zwei congruente Dreiecke werden meistens nur für eine Auflösung gehalten, indessen wir brauchen für unser Problem zweimal zwei Auflösungen und die sind auch vorhanden.

Fig. 9 ϰ. Denn betrachten wir zuerst Fig. 9 ϰ, durch welche die erste Dreiecksaufgabe gelöst ist. Hier soll nicht nur GS — FS = c, sondern auch GS′ — FS′ = c sein. Deswegen haben wir $GS' = \infty - f' = -g$ und $FS' = \infty - g' = -f$ zu setzen. Dann liefern mir $\frac{GS + FS}{2} = \frac{f+g}{2}$ und $\frac{GS' + FS'}{2} = -\frac{f+g}{2}$ die beiden entgegengesetzten Werthe für x, welche ich gebrauche, um in Fig. 9 γ die Linien DL und DL′ ziehen zu können.

Fig. 9 λ. In Fig. 9 λ, durch welche die zweite Dreiecksaufgabe gelöst ist, soll sowohl GS + FS = c, als auch GS′ + FS′ = c sein. Die Linien GS′ und FS′ dürfen hier also nicht als negativ betrachtet werden. Während nun $\frac{GS - FS}{2} = \frac{f-g}{2}$ den positiven Werth von x liefert, welchen ich brauche, um in Fig. 9 γ die Linie DL‴ zu zeichnen, giebt mir $\frac{GS' - FS'}{2} = -\frac{f-g}{2}$ den negativen Werth von x, durch welchen ich DL″ erlange.

Was also der Arithmetik nicht gelang, nämlich die beiden Dreiecksaufgaben aus einander zu halten, ist der Geometrie gelungen, indem sie, auf die Anschauung gestützt, sorgfältig zwischen Summe und Differenz der Katheten unterschied, sie hat es dadurch möglich gemacht, eine Aufgabe, die bei arithmetischer Behandlung auf den vierten Grad führte, durch Kreis und gerade Linie zu lösen.

§ 49.

Dennoch kann man, wie schon Newton (pag. 120) angedeutet und Bézout (pag. 334) ausführlich gezeigt hat, die vorliegende Aufgabe durch eine bloße quadratische Gleichung auflösen, wenn man als unbekannte Größe eine Linie wählt, die nur zweideutig ist.

Digitized by Google

Man verbinde nämlich in Fig. 9 γ die Punkte L und L′, ferner L″ mit L‴, ziehe durch A und D die Linie TT′, wodurch Fig. 9 μ entsteht, in welcher, weil $AL = AL' = \frac{c}{2}$ und, absolut genommen auch DL = DL′ ist, DT auf LL′ senkrecht steht und aus ähnlichen Gründen auch DT′ auf L″L‴. Könnte man nun DT oder DT′ finden, so dürfte man nur in T und T′ Lothe errichten und aus A mit dem Radius $\frac{c}{2}$ einen Kreis beschreiben, welcher jene Lothe in den vier gesuchten Punkten L, L′, L″, L‴ treffen würde, weil sowohl AL, wie auch $AL'' = \frac{c}{2}$ ist. Diese beiden Linien DT und DT′ zu finden, hat aber keine Schwierigkeit. Fig. 9 μ.

Denn es ist LAB = LBA = BDE = n; weil nun TAL = 45° + n, so ist ALT = 45° — n; aber auch TDL = 45° — n. Folglich ist Δ ATL ∽ Δ DTL.

Ebenso ist Δ AT′L″ ∽ Δ DT′L″; denn C″DJ = L″B″A = B″AL″ = n′, weil nun T′AL″ = 45° — n′ ist, so ist T′L″A = 45° + n′, es ist aber auch T′DL″ = ADC″ = 45° + n′.

Aus der Aehnlichkeit der genannten Dreieckspaare folgt, wenn wir die Diagonale AD des Quadrats AEDJ mit d bezeichnen, und DT = y, DT′ = y, nennen,

$$y : \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y - d)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y - d)^2} : y - d$$

$$y_, : \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y_, + d)^2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - (y_, + d)^2} : y_, + d.$$

Die hieraus fließenden quadratischen Gleichungen $2y^2 - 3dy + \left[d^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = 0$ und $2y_,^2 + 3dy_, + \left[d^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right] = 0$ geben

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{3}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = T \text{ und } = -T' \\ y_, &= -\frac{3}{4}d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = T' \text{ und } = -T \end{aligned}\right\} \text{ wofern } \left(\frac{c}{2}\right)^2 > d^2 \text{ ist.}$$

Als wir, um die Lage der Punkte L und L′ angeben zu können, suchten, wie weit der Punkt T auf der Linie AD rechts von D liegen muß, fanden wir, daß er auch links von D liegen kann und zugleich wie weit links; und wenn wir darauf behufs der Construction der Punkte L″ und L‴ untersuchen, wie weit der Punkt T′ links von D liegen muß, so finden wir zugleich, daß er auch rechts von D liegen kann. Ueber diese Erscheinung, hoffe ich, wird man sich nach den gemachten Mittheilungen nicht weiter wundern.

§ 50.

Die im vorigen § gewonnenen Resultate haben für uns noch eine besondere Bedeutung.

1) Wer nämlich Bézout's Darstellung der negativen Wurzeln, wie wir sie, als wir x suchten, in Fig. 9 α und Fig. 9 β vermittelst der Quadrate A′E′DJ′ kennen gelernt haben, auch hier festhalten möchte, wo es sich darum handelt, y zu finden, der bedenke folgendes. So

wie er dort den positiven Werth von x auf DL, den negativen auf DL′ bezog, so müßte er
Fig. 9 *v*. z. B. auch in Fig. 9 *v*, während er den positiven Werth von y auf DT bezieht, den negativen Werth von y auf DT′ beziehen, welches absolut genommen = DT ist. Daran ist aber nach dem vorigen § nicht zu denken, wie solches auch schon Bessel in seinen Vorlesungen aussprach.

2) Die gefundenen Ausdrücke für y enthalten für den ersten Augenblick eine Schwierigkeit. Die Ausdrücke für x zeigten nämlich, daß wenn $c^2 < 8\,a^2$ ist, zwei Wurzeln (DL″ und DL‴) imaginär wurden. Mithin müßte der zweite Werth von y (— T′) und der erste Werth von y, (+ T′), welche auf die beiden genannten Wurzeln Bezug haben, für den Fall, daß $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ ist, auf etwas Unmögliches hinweisen. Ein solcher Hinweis scheint hier nicht vorhanden, da sie auch in diesem Falle etwas reelles geben. Und doch ist er vorhanden. Da nämlich die beiden Werthe von y oder y, aus einer quadratischen Gleichung sich ergeben und der eine Werth zur Bestimmung der stets reellen Schnittpunkte L und L′ unter allen Umständen reell ausfallen muß, da ferner jede quadratische Gleichung entweder zwei reelle oder zwei imaginäre Auflösungen hat, so kann allerdings der andere Werth, der sich jetzt auf die imaginären Schnittpunkte (L″ und L‴) bezieht, nicht imaginär sein, er wird aber in der ersten Gleichung für y, wo wir ihn negativ erwarteten, positiv, und in der zweiten Gleichung für y,, wo wir ihn für reelle Schnittpunkte (L″ und L‴) positiv fanden, jetzt, da sie imaginär sind, negativ. Denn offenbar hat, wenn $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ ist, die erste Gleichung für y zwei positive Wurzeln, und die zweite Gleichung für y, zwei negative. Hiemit, meine ich, hat die Algebra die Unmöglichkeit gewisser Schnittpunkte hinreichend signalisirt und die noch oft geäußerte Ansicht, daß unmögliche Lösungen geometrischer Probleme sich bei arithmetischer Behandlung derselben stets durch imaginäre Wurzeln verrathen müßten, ist hienach zu corrigiren.

§ 51.

Lagrange, welcher sich (Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen, 3, pag. 528) auch mit der Newton'schen Aufgabe beschäftigt hat, führt als Unbekannte die Entfernung eines
Fig. 9 *δ* und Fig. 9 *ε*. der Schnittpunkte B, B′, B″, B‴ von J ein. Obgleich er dadurch auf eine vollständige Gleichung des vierten Grades kommt, so hat er den Vortheil, daß er in der Bestimmung der Vorzeichen nicht irren kann. Mit Recht erklärt er daher die beiden Strecken, welche auf der einen Seite von J liegen, für positiv, und die beiden andern Strecken auf der andern Seite von J für negativ. Denn sowohl aus der Proportion $z : \sqrt{z^2 + b^2} = z - a : c$, wodurch JB gefunden werden soll, als auch aus der Proportion $z : \sqrt{z^2 + b^2} = a - z : c$ für JB′ erhält man

$$\text{I.}\quad z^4 - 2\,a\,z^3 + (a^2 + b^2 - c^2)\,z^2 - 2\,a\,b^2\,z + a^2\,b^2 = 0.$$

Dagegen aus der Proportion $z_, : \sqrt{z_,^2 + b^2} = z_, + a : c$, auf welche man kommt, wenn man JB″ oder JB‴ sucht, d. h. wenn man fragt, wie weit der gesuchte Schnittpunkt links von J liegt, erhält man

$$\text{II.}\quad z_,^4 + 2\,a\,z_,^3 + (a^2 + b^2 - c^2)\,z_,^2 + 2\,a\,b^2\,z_, + a^2\,b^2 = 0.$$

Digitized by Google

Daß ſtets $a^2 + b^2 < c^2$ ſein müſſe, iſt wohl kaum nöthig, noch beſonders hervorzuheben.

Da die beiden Gleichungen, wenn man $z = -z$, oder $z_, = -z$ ſetzt, in einander übergehen, ſo iſt erſichtlich, daß die beiden poſitiven Wurzeln der einen Gleichung negative Wurzeln der andern ſind, und daß alſo, wenn z. B. JB″ und JB‴ als poſitive Strecken aufgefaßt werden, die auf der anderen (rechten) Seite von J liegenden JB und JB′ negativ ſein müſſen.

Dieſelbe Ueberzeugung gewinnt man auch, wenn man beide biquadratiſche Gleichungen auflöſt. Zur Erleichterung ſetze man wieder $b = a$, bringe das von c^2 abhängige Glied auf die andere Seite des Gleichheitszeichens und addire noch auf beiden Seiten $a^2 z^2$ oder $a^2 z_,^2$, dann erhält man aus I. $(z^2 - a z + a^2)^2 = (a^2 + c^2) z^2$, aus II. $(z_,^2 + a z_, + a^2)^2 = (a^2 + c^2) z_,^2$. Setzt man nun $\sqrt{a^2 + c^2} = r$, $\sqrt{c^2 - 2a^2 + 2ar} = R$, $\sqrt{c^2 - 2a^2 - 2ar} = R'$, und beachtet, daß man für jede einzelne Auflöſung das Vorzeichen von r feſtzuhalten hat, ſo ſind die vier Wurzeln aus

I. II.

$$z = \begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R}{2} \\ \frac{a}{2} + \frac{r}{2} - \frac{R}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{r}{2} + \frac{R'}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{r}{2} - \frac{R'}{2} \end{cases} \qquad z_, = \begin{cases} -\frac{a}{2} - \frac{r}{2} - \frac{R}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{r}{2} + \frac{R}{2} \\ -\frac{a}{2} + \frac{r}{2} - \frac{R'}{2} \\ -\frac{a}{2} + \frac{r}{2} + \frac{R'}{2} \end{cases}$$

welche deutlich zeigen, daß Wurzeln, die in I. poſitiv ſind, in II. negativ ſind und umgekehrt.

In ſo fern $a = b$ iſt, geben natürlich die gefundenen Ausdrücke für z zugleich an, wie weit die Schnittpunkte C, C′, C″, C‴ von E entfernt ſind.

Die Deutung der negativen Wurzeln in I. und II. kann ich füglich dem Leſer ſelbſt überlaſſen.

§ 52.

Aber es wird Zeit ſein, daß ich die Deutung der imaginären Wurzeln unternehme, die dann zum Vorſchein kommen, wenn $c^2 < 8a^2$ oder $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < d^2$ iſt.

So viel ich weiß, hat außer Bézout (pag. 336) Niemand auch nur die Frage vorgelegt, in welcher Beziehung dieſe imaginären Wurzeln zu dem Newton'ſchen Probleme ſtehen. Um ſo nöthiger ſcheint es mir, zunächſt Bézout's Anſicht mitzutheilen. Man denke ſich nach ſeiner Anleitung in Fig. 9 μ aus L mit dem Radius $\frac{c}{2}$ einen Kreis beſchrieben, verlängere DT bis zum Kreiſe in M. Da $MAB = 45^0$ iſt, ſo iſt $MLB = 90^0$. Daher iſt ML die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen DM und MT. Nun nennt er $AT = \eta$ und erhält dann aus $(d + 2\eta)\,\eta = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ für ſeine Unbekannte die beiden Ausdrücke $\eta = -\frac{d}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$. Er bezieht hier richtig den negativen Werth η, auf AT′ und fährt

Digitized by Google

dann fort: Mais il se présente ici une rémarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra décrire du point A comme centre, et dn rayon $\frac{1}{2}$ e, ne rencontre pas la perpendiculaire T'L'', parceque la qnantité $\frac{1}{2}$ e peut être plus petit que AT'. Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étaient impossibles, l'Algèbre le faisait connaître, cependant dans l'équation (für η) rien ne manifeste dans quels cas cette impossibilité a lieu; car tout est nécessairement positif sous le radical.

Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu' une question exprimée algébriquement, sera impossible, l'Algèbre manifestera cette impossibilité; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsq'on aura exprimé par cette même Algèbre, tout ce que la question suppose, soit explicitement, soit implicitement; or c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet, la question suppose tacitement que les trois points D, A, L, ne sont pas sur une même ligne droite, et c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement; nous avons exprimé que LM était moyenne proportionelle entre DM et MT, propriété qui appartient à la vérité au triangle rectangle, mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points D, A, L, sont supposés en ligne droite. En effet, il est évident qu'on peut se proposer cette question: Trouver sur la direction DL, quelle intervalle il faudrait laisser entre les deux droites, DA et ML de grandeurs connues, pour que ML soit moyenne proportionelle entre DM et MT, le point T étant le milieu de AM. Or cette question conduit précisément à la même équation que ci-dessus, et cette équation donne deux solutions, l'une pour le cas où les deux points A et M sont entre D et L; l'autre, pour le cas contraire. Il n'est donc pas étonnant que lorsque la première question devient impossible, l'Algèbre n'en dise rien, puisqu' elle doit donner la solution de cette seconde question qui est toujours possible.

Fig. 9 ξ.

Man wird zugeben müſſen, daß Bézout die hier obwaltende Schwierigkeit nicht gelöſt, ſondern nur bei Seite geſchoben hat. Die Aufgabe, die ich mir vorgenommen habe, zu löſen, iſt die: nachzuweiſen, in welcher innigen Beziehung die erhaltenen Werthe für x, y, z zu dem Newton'ſchen Problem ſelbſt ſtehen, wenn die Schnittpunkte L'' und L''' imaginär werden. Zu dieſem Zwecke wollen wir uns ohne Vorurtheil von den gegebenen Verhältniſſen leiten laſſen.

§ 53.

Der Werth von $y_{,,}$ welchen wir nach § 49 auf die Diagonale DA im Punkte D nach links hin für unſern gegenwärtigen Zweck aufzutragen haben, heißt: $y_{,,} = -\frac{3}{4}\,d + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^2}$. Da er aber bei der jetzigen Vorausſagung, daß $\frac{e}{2} < d$ iſt, nach § 50 negativ ausfällt, ſo haben wir ſeinen abſoluten Werth $V = \frac{3}{4}\,d - \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^2}$

Fig. 9 o.

nach rechts hin aufzutragen; es ſei alſo in Fig. 9 o DT = V, in T haben wir ein Loth zu errichten, FG, dann aus A mit dem Radius $AO = \frac{e}{2}$ einen Kreis zu beſchreiben und die

Schnittpunkte des Kreises und Lothes in weitere Betrachtung zu ziehen. Aber, weil c zu klein ist, entstehen keine reellen Schnittpunkte, wie Bézout nach § 52 ganz richtig erkannt hat, ein Zeichen eben, daß es unter der jetzt gemachten Voraussetzung unmöglich ist, innerhalb des Quadranten FAG von einem seiner Schenkel bis zum andern durch D eine Linie $= c$ zu ziehen. Obgleich wir nun das Unmögliche nicht möglich machen können, so ist es unsre Pflicht zu untersuchen, was die imaginären Schnittpunkte hier für Resultate liefern werden, von denen seit dreißig Jahren doch schon so viel geschrieben ist. Unter andern hat Chasles (Traité, pag. 459, Le pied de la perpendiculaire abaissée du centre d'un cercle sur une droite est le milieu des deux points d'intersection, réels ou imaginaires, de la droite et du cercle) bewiesen, daß T die Mitte zwischen den beiden Punkten ist. Doch hat er seiner Methode wegen die Stelle der Punkte selbst nicht angegeben. Sein Uebersetzer Dr. Schnuse (die Grundlehren der neuern Geometrie, 1856, pag. 41 und 270), in der Meinung sich auf Gauß zu stützen, sagt, daß sie, eben weil sie imaginär sind, nicht auf FG liegen können, sondern auf der durch T gezogenen Senkrechten AA', in gleichen Abständen von T. Ich kann dem aber nicht beitreten, sondern mit Bezugnahme auf zwei meiner frühern Schriften (Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der Progressionen, 1845, pag. 17, und Auflösung der kubischen Gleichungen, 1861, pag. 4) behaupte ich, daß diese imaginären Schnittpunkte auf der idealen Sekante FG selbst liegen und zwar, daß es die Punkte L und L' sind, welche man dadurch erhält, daß man in dem Punkte O die zu dem Kreise A zugehörige gleichseitige Hyperbel L'OL zeichnet, deren halbe Hauptaxe AO ist. Die Zugehörigkeit im Allgemeinen beweise ich dadurch, daß ich sage: So lange in Fig. 9 μ $AT' < \frac{c}{2}$ war, mußte zu seinem Quadrat (η_1^2) noch etwas Positives $(T'L''^2 = u^2)$ addirt werden, um $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ zu erlangen; sobald aber in Fig. 9 o AT oder $Y > \frac{c}{2}$ wird, muß zu seinem Quadrat Y^2 etwas Negatives $(-U^2)$ addirt werden, wenn man doch nur $\left(\frac{c}{2}\right)^2$ erhalten will. Nun ist es aber in der Mathematik sonst immer Gebrauch, was bloß durch + oder — unterschieden ist, in eine Einheit zusammen zu fassen. Warum will man denn hier zwischen der Curve, welche in Fig. 9 μ an die Gleichung $\eta_1^2 + u^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ gebunden ist und zwischen der Curve, welche in Fig. 9 o von der Gleichung $Y^2 - U^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ abhängt, die in theoretischer Hinsicht durch nichts gerechtfertigte Kluft länger bestehen lassen? Man hat also ein Recht, die Hyperbel L'OL gewisser Maßen als eine Fortsetzung des Kreises um A anzusehen, daher sind L und L' die hier in Betracht kommenden imaginären Schnittpunkte zwischen dem Kreise A und der idealen Sekante FG.

Ehe ich weiter gehe, will ich das so eben im Allgemeinen gewonnene Resultat an den in den frühern §§ entwickelten arithmetischen Ausdrücken für x und y prüfen. In Bezug auf Fig. 9 μ war

Digitized by Google

$y_, = -\frac{3}{4}\,d + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2} = -\frac{3\,a\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,r$, wo $r = \sqrt{a^2 + c^2}$, also $y_,^2 = \frac{5}{4}\,a^2 + \frac{c^2}{8} - \frac{3}{4}\,a\,r$. Da nun $x^2 = a^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - a\,r$ ist, so bleibt für $L''T'^2$ übrig: $u^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{8} - \frac{a\,r}{4}$, ein Ausdruck, den wir auch unmittelbar aus den in § 47 vorkommenden ähnlichen Dreiecken hätten ableiten können.

Weil aber, wenn in Fig. 9 *o* $c^2 < 8\,a^2$ ist, x^2 negativ $= -X^2$ wird, so muß selbstverständlich auch u^2 negativ werden $= -U^2$, so daß also $U^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{c^2}{8} + \frac{a\,r}{4}$ ist.

Ferner hatten wir für Figur 9 μ den absoluten Werth von $AT' = -\eta_,$ gefunden $= \frac{d}{4} + \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$, also ist dort $AT'^2 = \eta_,^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{8} + \frac{a\,r}{4}$. In Fig. 9 *o* erhalten wir für $AT = Y$ und für $AT^2 = Y^2$ dieselben arithmetischen Ausdrücke. Demnach ist wirklich dort $\eta_,^2 + u^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ und hier $Y^2 - U^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Somit hoffe ich, bis zur Evidenz nachgewiesen zu haben, daß hier die Punkte L und L' dieselbe Rolle spielen, welche dort von den Punkten L'' und L''' übernommen war.

Wenn nun also in Fig. 9 *o* L und L' die imaginären Schnittpunkte sind, so haben wir jetzt von D durch diese Punkte Linien zu ziehen bis dahin, wo sie die Schenkel des gegebenen rechten Winkels JAE treffen. Die Fixirung der dadurch entstehenden Schnittpunkte kann nicht schwierig sein, nachdem wir in § 49 erfahren haben, wie weit sie von E und J entfernt sind. Von den dort aufgestellten vier Werthen von z, haben wir für unsern Zweck die beiden letzten zu wählen, welche lauten

$$z_, = \frac{r - a}{2} \pm \frac{R'}{2}, \text{ wo } R' = \sqrt{c^2 - 2\,a^2 - 2\,a\,r}.$$

Da aber gegenwärtig $c^2 < 8\,a^2$ ist, so ist dieses R' imaginär, etwa $= 2\,i\,P$, wo dann P reell und $= \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,a\,r - c^2}$ ist. Der Kürze wegen setze ich noch den reellen Theil von $z_,$ nämlich $\frac{r - a}{2} = \varrho$: Dann geben die Ausdrücke $z_, = \varrho \pm i\,.\,P$ an, wie weit die gesuchten Schnittpunkte links von J oder unterhalb E liegen. Hier ist es angebracht, sich der Gaußischen Theorie von der Construction complexer Ausdrücke zu bedienen. Wir schneiden also zuvörderst links von J ein Stück $JF = \varrho$ ab. Wäre R' noch reell, so müßten wir jetzt von F aus nach den ganz entgegengesetzten Richtungen FM' und FS Stücke $= R'$ abschneiden. Nun aber, da R' imaginär ist, d. h. im halben Gegensatze zu der ursprünglichen Richtung JF steht, haben wir natürlich in F ein Loth B'A' zu errichten und darauf nach entgegengesetzten Richtungen die Stücke $FB' = FB = P$ abzuschneiden. Ebenso tragen wir unterhalb E die Linie $EG = \varrho$ auf, errichten in G ein Loth und machen $GC = GC' = P$. Dann geben die Punkte B und C einerseits und die Punkte B' und C' andererseits an, wie weit man die Linien DL und DL' nach beiden Seiten zu verlängern hat.

Digitized by Google

§ 54.

Von den ſich jetzt aufdrängenden Fragen will ich zunächſt die beantworten: Ob die vier Punkte B, D, L, C oder die vier Punkte C′, D, L′, B′ in einer geraden Linie liegen?

Da $\text{tg}.\text{TDL} = \frac{U}{V} = \frac{2P}{3a-r} = \tau$ iſt, ſo iſt $\text{tg}.\text{EDL} = \frac{\tau-1}{\tau+1} = \frac{2P-3a+r}{2P+3a-r}$.

Ferner iſt $\text{tg}.C = \frac{DW}{WC} = \frac{\varrho}{a+P}$. Weil ſich aber leicht nachweiſen läßt, daß $\frac{2P-3a+r}{2P+3a-r} = \frac{\varrho}{a+P}$ iſt, ſo folgt aus C = EDL, daß die beiden Geraden DL und DC zuſammenfallen. Dann iſt in dem Dreieck BVD die Linie DV = a — P gemacht, mithin iſt $\text{tg}\ B = \frac{a-P}{\varrho}$. Da aber $\varrho^2 + P^2 = a^2$ iſt, ſo iſt auch $\frac{a-P}{\varrho} = \frac{\varrho}{a+P}$, folglich C = B und WDC = BDV, d. h. BDC iſt eine gerade Linie, alſo iſt auch BDLC eine gerade Linie und ebenſo auch C′DL′B′.

Nun wollen wir nachſehen, ob auch wirklich L und L′ die Mitten dieſer beiden Geraden ſind. So wie bei Fig. 9 $\mu\, u^2 = y_1 . (d + y_1)$ war, ſo iſt jetzt in Fig. 9 $o\, U^2 = Y.(d - Y)$, d. h. DH : HL = HL : HA. Alſo iſt ALD ein rechter Winkel. Aus der Congruenz der beiden Dreiecke AFB und AGC folgt, daß AB = AC iſt. Mithin iſt L die Mitte der Grundlinie BC eines gleichſchenkligen Dreiecks. Daſſelbe läßt ſich von L′ nachweiſen.

Die beiden Geraden BC und B′C′ ſind einander gleich. Denn es iſt A′C = ϱ + a + P = A′B′, und daß C = B′ iſt, ergiebt ſich aus folgenden Betrachtungen: AFA′G iſt ein Quadrat, deſſen Diagonalen AA′ und FG ſind, mithin ſteht D von den Schenkeln des rechten Winkels A′ gleich weit ab; daher iſt es leicht, zu dem Dreieck DWC ein anderes mit dem Winkel B′ zu zeichnen, welches ihm wegen der Gleichheit der Catheten congruent iſt.

Es iſt AL = LC und AL′ = L′B′. Denn es iſt < LAT = < TLD = < GLC, und weil LGQ = 45° = TAN, ſo iſt auch < LAN = C; außerdem iſt LNGQ ein Quadrat, alſo iſt ALN ≅ LQC.

Aber, wird man ſagen, was kann das alles helfen? es iſt doch nicht BC = e, da offenbar $AL > \frac{e}{2}$ iſt. Wir wollen uns durch dieſen Einwand nicht aufhalten laſſen, ſondern unterſuchen, wie groß hier BC iſt. Da der Winkel ALD ein rechter iſt, ſo haben wir $AL^2 = AT . AD = Y . d = \frac{2a^2 + 2ar}{4}$ und weil $P^2 = \frac{2a^2 + 2ar - e^2}{4}$ iſt, ſo iſt $AL^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + P^2$. Alſo nur ſo lange $\frac{e}{2} >$ oder = d iſt, iſt $BC^2 = e^2$, ſo bald aber $\frac{e}{2} <$ d wird, iſt $BC^2 = e^2 + (2P)^2$.

Wir ſind jetzt auf einem Standpunkte angelangt, von wo aus es wünſchenswerth iſt, nachzuleſen, was Chasles bei Erwähnung des Imaginären über parties permanentes und parties accidentelles einer Figur ſagt (Geſchichte der Geometrie, überſetzt von Sohnke, pag. 203, den

Digitized by Google

Aperçu historique ſelbſt habe ich nicht zu Geſicht bekommen). Danach würde aus der Newton'ſchen Aufgabe etwa folgendes Theorem werden: Wenn man in den Figuren 9 μ und 9 o aus A Kreiſe mit dem Radius $\frac{c}{2}$ beſchreibt, die Diagonale $AD = d$ des Quadrats $AEDJ = a^2$ nach links hin von D aus um $y, = -\frac{3}{4} d \pm \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ verlängert, in den Endpunkten dieſer Verlängerung Lothe errichtet, welche jene Kreiſe in L ſchneiden, wenn man ferner die Linien DL nach beiden Seiten verlängert, bis ſie die Seiten des Quadrats in B und C treffen, dann iſt unter allen Umſtänden L von A, B, C gleich weit entfernt. Das wäre nach Chasles eine bleibende Eigenſchaft der Figur. Iſt bei dieſer Gelegenheit, wie in Fig. 9 μ $\frac{c}{2} > d$, ſo kommt noch dazu, daß $BC^2 = c^2$ iſt; iſt aber, wie in Fig. 9 o $\frac{c}{2} < d$, ſo iſt $BC^2 = c^2 + (2P)^2$, auch ſind B und C von A gleich weit entfernt. Das wären dann bloß zufällige Eigenſchaften der ſpeciellen Figuren. Hiernach könnten wir ſagen: Obgleich es bei Figur 9 o unmöglich iſt und bleibt, durch D eine Linie $= c$ in der angegebenen Weiſe zu legen, ſo genügt die von uns gezogene Linie BC doch in der bleibenden Relation, wonach ſich auf ihr ein Punkt L angeben läßt, welcher von B und C und A gleich weit entfernt iſt. Wenn aber Chasles faſt in einem Athemzuge ſagt pag. 395: „Wenn z. B. ein durch die Rechnung gegebener Ausdruck zur Beſtimmung eines Punktes auf einer Geraden imaginär iſt, ſo würde man einen ſehr bedeutenden Fehler begehen, wenn man dieſen Punkt conſtruiren wollte, als wenn ſein Ausdruck reell wäre. Der auf dieſe Weiſe conſtruirte Punkt würde weder zu der Figur, noch zu der Aufgabe, die vorgelegt iſt, gehören, und alle aus der Betrachtung dieſes Punktes abgeleiteten Reſultate würden falſch ſein.“ — und pag. 397: „Die Correlation von Figuren, welche dadurch unterſchieden ſind, daß man in der einen als reell einen Ausdruck conſtruirt, der in der andern imaginär iſt, iſt ein Gegenſtand für ganz neue Unterſuchungen, von denen es uns ſcheint, daß ſie zu einigen allgemeinen Geſetzen der Ausdehnung führen können, welche den Einfluß der geometriſchen Doctrinen vermehren dürften“, wenn er auf der einen Seite vor der Identificirung des Kreiſes und der zugehörigen Hyperbel warnt und auf der nächſten Seite die Erfolge lobt, welche Lambert dadurch erzielt hat (vergl. meine Abhandlung über die kubiſchen Gleichungen, pag. 2) — ſo weiß ich mir das nicht zu erklären, nehme aber doch davon Veranlaſſung, dem Newton'ſchen Problem lieber folgende Faſſung zu geben, wobei ſämmtliche gewonnenen Reſultate in gleicher Berechtigung neben einander erſcheinen werden und ſich nichts als bloß zufällig herausſtellen wird: Man ſoll durch den Punkt D von einem Schenkel des rechten Winkels A bis zum andern eine Linie BC legen, welche als Hypotenuſe eines Dreiecks aufzufaſſen iſt, deſſen eine Cathete c iſt, und deſſen andere Cathete doppelt ſo lang iſt, als ſich der Abſtand des Schnittpunktes eines Schenkels des rechten Winkels A und der geſuchten Linie von dem nämlichen Schenkel des rechten Winkels den Umſtänden nach ergeben wird. Ich habe wohl kaum nöthig noch hinzuzufügen, daß, wenn $\frac{c}{2} > d$ iſt, dieſer Abſtand $= o$ iſt und

dann alſo BC = c werden ſoll, daß aber, wenn $\frac{c}{2} < d$ iſt, der Abſtand wegen der lateralen Lage der erwähnten Schnittpunkte = P iſt.

Dagegen will ich noch beſonders darauf aufmerkſam machen, daß, nachdem $DT = V = \frac{3}{4} d - \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2}$ conſtruirt worden iſt, und mit Hilfe des rechten Winkels DLA der Punkt L beſtimmt iſt, man wegen der Gleichung $\varrho^2 + P^2 = a^2$ oder auch wegen AL = LC durch einen Bogenſchlag den Punkt C gewinnen kann, in Folge deſſen die Conſtruction der imaginären Wurzeln der § 51 aufgeſtellten biquadratiſchen Gleichung $z_1 = \varrho \pm i \cdot P$ ohne alle Mühe zu vollziehen iſt.

§ 55.

Nachdem auf dieſe Weiſe für imaginäre Schnittpunkte der Zuſammenhang zwiſchen y_1 und z_1 auf das Vollſtändigſte vor Augen gelegt iſt, wollen wir noch zeigen, daß das imaginäre x dieſen Zuſammenhang nicht ſtört, ſondern im Gegentheil über unſer Problem ein ganz neues Licht verbreitet. Wenn man in Fig. 9 μ DT′ = y, und T′L″ = u gehörig beſtimmt hat, und wenn man dann aus L″ mit dem Radius x einen Kreis beſchreibt, ſo wird derſelbe wegen der Gleichung $y_1^2 + u^2 = x^2$ die Linie AD zunächſt in dem Punkte D treffen, aber auch in einem Punkte D′, den man durch Verlängerung von AD über T′ hinaus erlangt. Obgleich dann AD′ > AL″ iſt, ſo wird man dennoch durch D′ vorſchriftsmäßig zwei Linien, jede = c legen können, wenn man dabei nach Anleitung des vorigen § L‴ und L″ als imaginäre Schnittpunkte auffaßt.

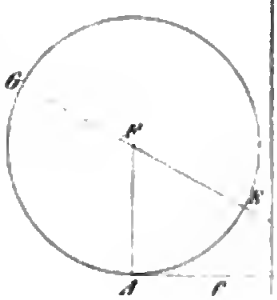
Die eben erwähnte Gleichung $y_1^2 + u^2 = x^2$ geht nach § 53 für Fig. 9 *o* in folgende über: $U^2 - V^2 = X^2$. Wenn man daher hier DT = V und TL = U dem angeführten § gemäß beſtimmt hat und aus L mit dem Radius LH = X einen Kreis beſchreibt, ſo trifft dieſer durch ſeinen ihm zugehörigen Hyperbelbogen DHD′ die Linie AD nicht nur in D, ſondern auch in dem ihm entſprechenden Punkt D′, wobei natürlich DT = D′T und DL = D′L iſt. Zieht man dann durch D′ und L einerſeits und durch D′ und L′ andererſeits bis an die Schenkel des gegebenen rechten Winkels JAE die Linien SM und S′M′, ſo ſind dieſelben nicht nur unter einander gleich, ſondern jede von ihnen iſt auch = BC = B′C′. Zum Beweiſe führe ich folgendes an: Die Winkel MLG und CLG ſind gleich, weil ihre Scheitelwinkel gleich ſind, LGQ = LGN = 45°, alſo iſt auch C = M. Weil ferner LQ = LN iſt, ſo iſt auch QC = NM und GC = GM = P. Daher iſt A′C = AM, weil jede Linie = a + ϱ + P iſt. Nun folgt aus der Congruenz der Dreiecke A′BC und ASM nicht bloß, worauf es zunächſt ankommt, daß BC = SM iſt, ſondern auch, daß A′B = AS iſt. Weil aber LQ die Hälfte von A′B und alſo auch LN die Hälfte von AS iſt, ſo folgt, daß, ſo wie L die Mitte von BC iſt, auch L die Mitte SM iſt. Daher iſt AL = LS = LM. (Auch iſt FB = FS = C′G = GS′ = P.) Ich nenne noch den ſenkrechten Abſtand des Punktes D′ von den Schenkeln des gegebenen rechten Winkels a′ und SM = c′ oder $AL = \frac{c'}{2}$, ſo daß alſo $a' = \varrho$ und $\frac{c'}{2} = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + P^2}$ iſt.

Digitized by Google

Dieſe Reſultate ſind für das vorliegende Problem von ganz beſonderer Bedeutung, wir können nämlich jetzt ſagen: Wenn durch den Punkt D innerhalb des Quadranten M'AM wegen des ungünſtigen Größenverhältniſſes zwiſchen a und c ſich nur imaginäre Linien BC und B'C', ede = c' legen laſſen, ſo kann man durch den ihm entſprechenden Punkt D' zwei reelle Linien SM und S'M' ziehen, welche jenen gleich und parallel ſind; die Schnittpunkte L und L', welche für jene imaginär waren, ſind für dieſe reell. Ferner, wenn durch den Punkt D' wegen der günſtigen Beſchaffenheit von a' und c' zwei reelle Linien SM und S'M' jede = c' gelegt werden können, ſo iſt man noch im Stande, von dem ihm entſprechenden Punkte D aus durch ihre Mitte L und L' zwei imaginäre Linien von gleicher Länge und Lage zu ziehen. — Auch iſt nicht außer Acht zu laſſen, daß die beiden Auflöſungen BC und B'C', welche für den gegebenen rechten Winkel MAM' imaginär waren, für den gegenüber liegenden rechten Winkel CA'B' reell ſind, und umgekehrt, daß die beiden andern Auflöſungen SM und S'M', welche für A reell waren, für A' imaginär ſind.

Ich überlaſſe es dem Leſer, a[n] Fig. 9 μ über den dem Punkte D entſprechenden Punkt in Bezug auf T, welcher über M h[er]aus liegt, ähnliche Betrachtungen anzuſtellen.

Digitized by Google



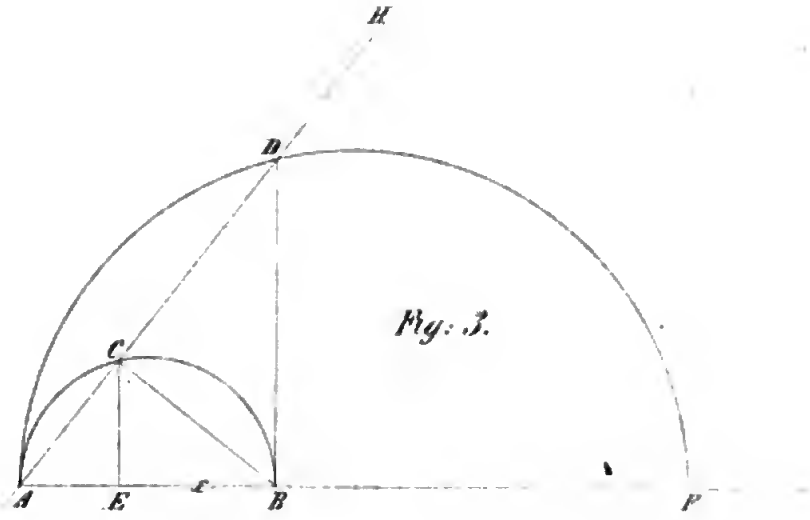


Fig: 3.

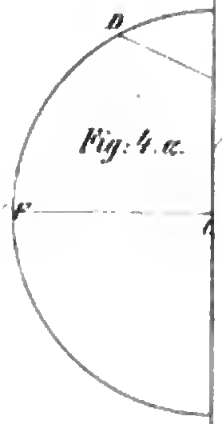


Fig: 4. a.

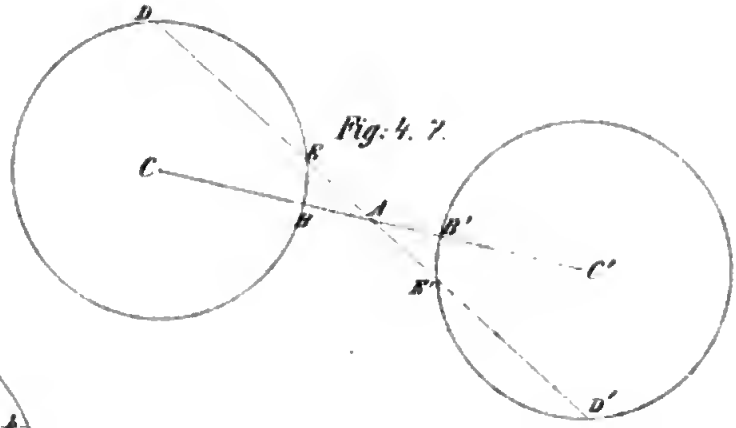


Fig: 4. 7.

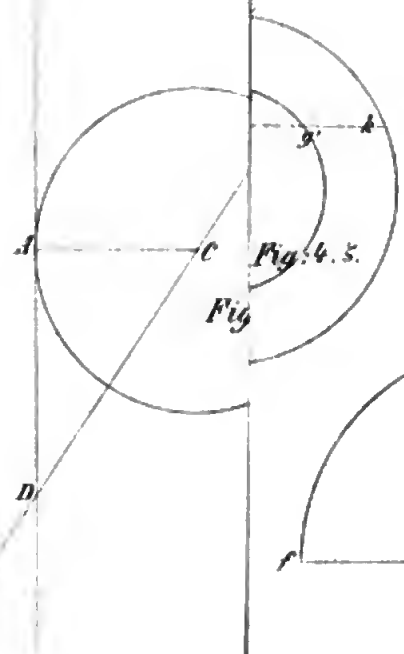
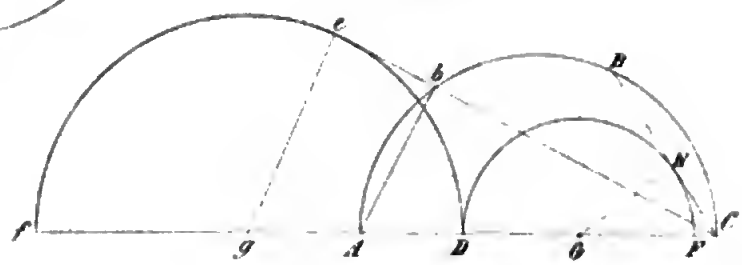


Fig: 4. 8.

Fig

Fig: 6.



BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE • NAPOLI •

Digitized by Google

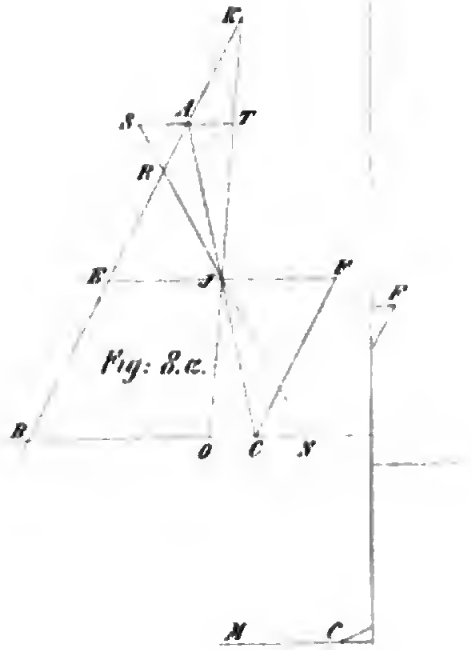


Fig: 8.e.

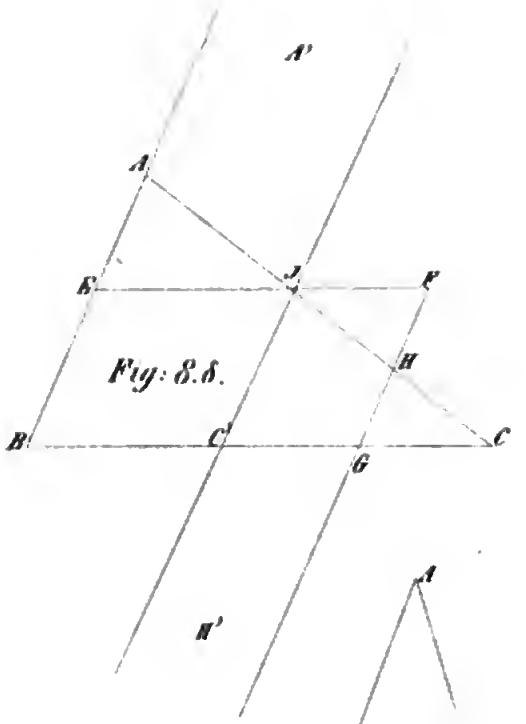


Fig: 8.8.

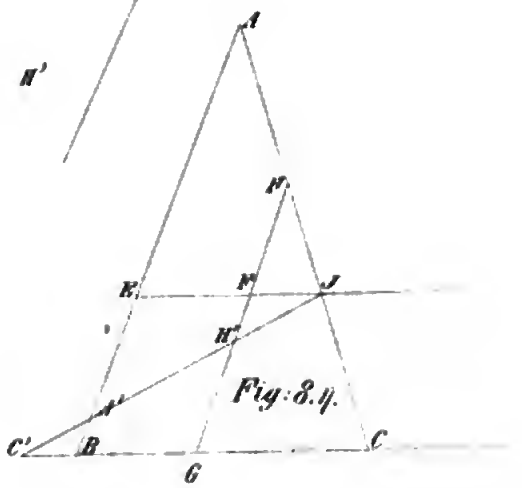
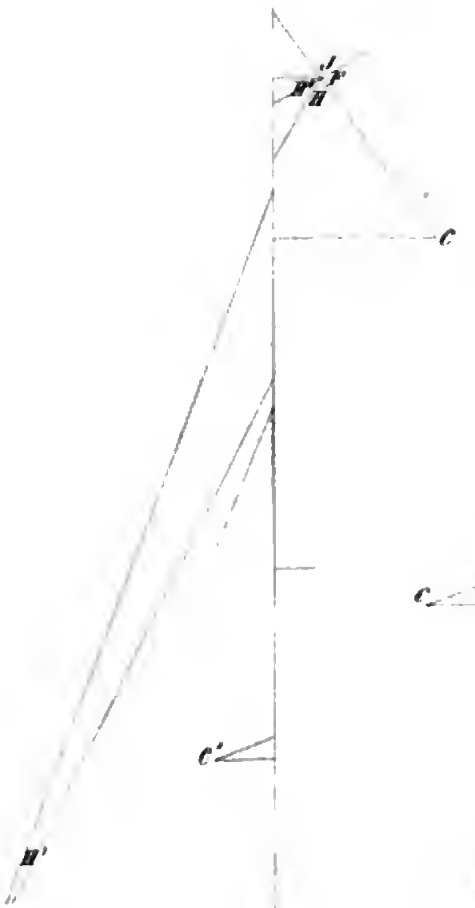


Fig: 8.η.



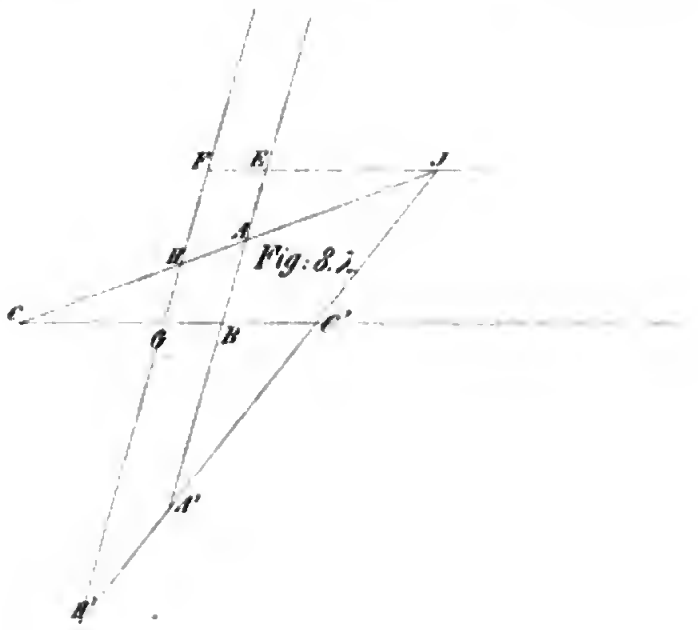


Fig: 8.ι.

BIBLIOTECA NAZIONALE NAPOLI

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZIONALE • NAPOLI •

Digitized by Google

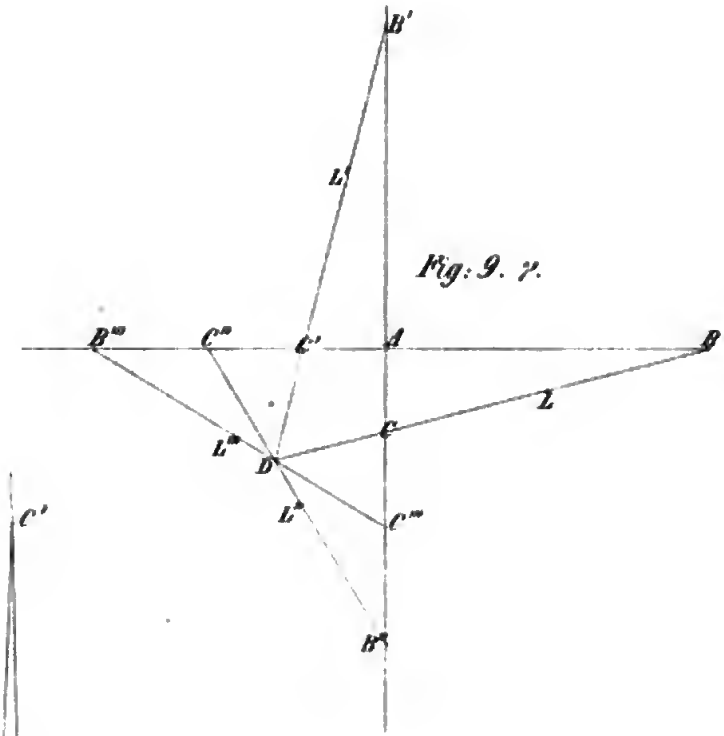


Fig: 9. γ.

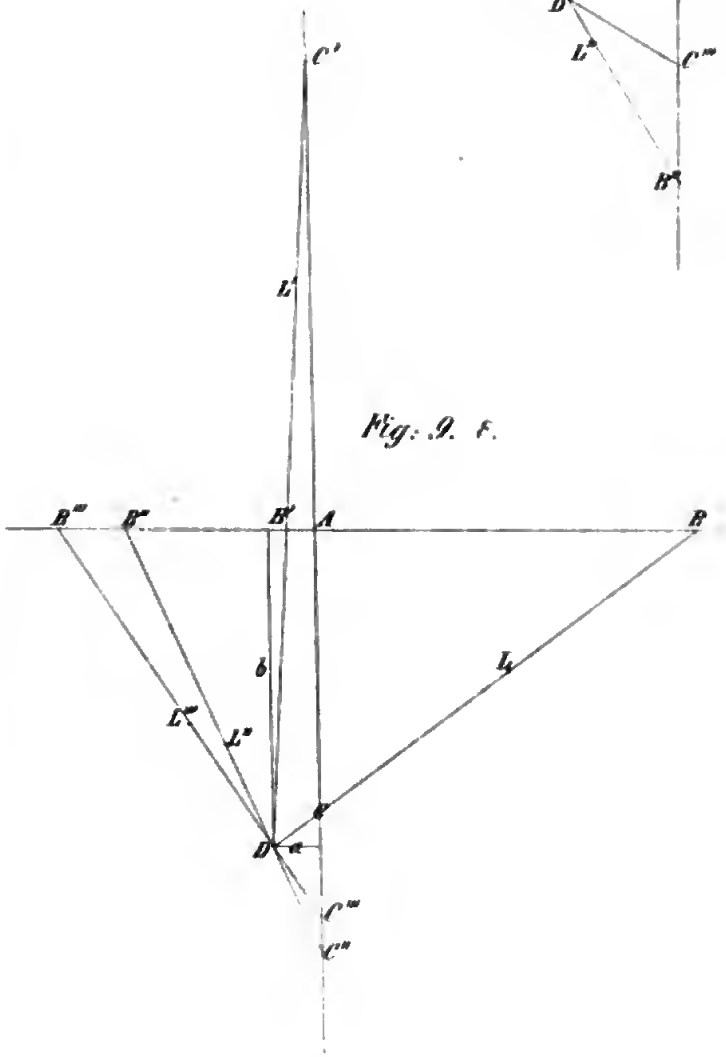


Fig: 9. ε.

Digitized by Google